Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4250 Romlig Statistikk**

Faglig kontakt under eksamen: Prof Jo Eidsvik
Tlf: 90127472

Eksamensdato: 27. mai 2016
Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
Tabeller og Formler i Statistikk, Tapir
NTNU godkjent kalkulator
Personlige, håndskrevne, gule titte-ark - A5-format

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 3
Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 KONTINUERLIGE STOKASTISKE FELT

Betrakt et stasjonært, isotropt gaussisk stokastisk felt $\{R(x); x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ parametrisert ved forventningsverdi μ_r, variansverdi σ_r^2 samt den romlige korrelasjonsfunksjonen $\rho_r(\tau); \tau \in \mathbb{R}^1$. La det stokastiske feltet være representert i en n-vektor $\mathbf{R}$ på et grid $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ over $\mathcal{D}$.

a) Spesifiser kravene som må oppfylles av modellparametrene $(\mu_r, \sigma_r^2, \rho_r(\tau))$ for at modellen for feltet skal være gyldig.

La $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ være en n-dimensjonal gaussisk pdf med forventningsverdi n-vektor $\boldsymbol{\mu}$ og kovarians $(n \times n)$-matrise $\boldsymbol{\Sigma}$.

b) Den n-dimensjonale pdf for $\mathbf{R}$ er gaussisk $N_n(\boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\Sigma}_r)$, også benevnt prior pdf $f(\mathbf{r})$.

Spesifiser uttrykkene for $(\boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\Sigma}_r)$ ved å benytte modellparametrene $(\mu_r, \sigma_r^2, \rho_r(\tau))$.

La det stokastiske feltet bli observert i en m-vektor $\mathbf{D}$ ifølge likelihood relasjonen $f(\mathbf{d}|\mathbf{r})$:

$$[\mathbf{D}|\mathbf{R} = \mathbf{r}] = \mathbf{H}\mathbf{r} + \mathbf{U}$$

hvor $\mathbf{H}$ er en observasjons $(m \times n)$-matrise og $\mathbf{U}$ er en gaussisk feil m-vektor $N_m(0\mathbf{i}_m, \sigma_{d|r}^2 \mathbf{I}_m)$ uavhengig av $\mathbf{R}$, hvor $\mathbf{i}_m$ og $\mathbf{I}_m$ er henholdsvis en enhets m-vektor og identitets $(m \times m)$-matrisen. Anta at den aktuelle observasjonen er $\mathbf{D} = \mathbf{d}$.

c) Spesifiser den $(n+m)$-dimensjonale pdf'en for $[\mathbf{R}, \mathbf{D}]$.

Spesifiser den n-dimensjonale pdf'en for $[\mathbf{R}|\mathbf{D} = \mathbf{d}]$, også benevnt posteriori pdf $f(\mathbf{r}|\mathbf{d})$.

En realisasjon $\mathbf{r}^s$ fra posteriori pdf $f(\mathbf{r}|\mathbf{d})$ kan bli generert ved en randomisert optimeringsprosedyre:

- Generer $\mathbf{r}^*$ fra $N_n(\boldsymbol{\mu}_r, \boldsymbol{\Sigma}_r)$
- Generer $\mathbf{d}^*$ fra $N_m(\mathbf{d}, \sigma_{d|r}^2 \mathbf{I}_m)$
- Beregn $\mathbf{r}^s = \arg\min_{\mathbf{r}} \{(\mathbf{d}^* - \mathbf{H}\mathbf{r})[\sigma_{d|r}^2 \mathbf{I}_m]^{-1}(\mathbf{d}^* - \mathbf{H}\mathbf{r})^T + (\mathbf{r}^* - \mathbf{r})\Sigma_r^{-1}(\mathbf{r}^* - \mathbf{r})^T\}$

d) Betrakt det 1-dimensjonale forenklede tilfellet med $n = 1$ og $m = 1$, da blir den randomiserte optimeringsprosedyren:

- Generer r^* fra $N_1(\mu_r, \sigma_r^2)$
- Generer d^* fra $N_1(d, \sigma_{d|r}^2)$
- Beregn $r^s = \arg\min_r\{(d^* - hr)[\sigma_{d|r}^2]^{-1}(d^* - hr) + (r^* - r)[\sigma_r^2]^{-1}(r^* - r)\}$

Demonstrer at denne prosedyren genererer en realisasjon fra posteriori pdf'en $f(r|d)$.

Oppgave 2 HENDELSES STOKASTISK FELT

Betrakt et homogent poisson stokastisk felt $\{X_i; i = 1, \ldots, N; \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ med modell intensitetsparameter $\lambda \geq 0$. Definer et vilkårlig del-område $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ og la $\mathcal{N}(\mathcal{B}) \in \{0, 1, \ldots\}$ være antallet punkter i del-området $\mathcal{B}$.

a) Spesifiser uttrykket for $\text{Prob}(\mathcal{N}(\mathcal{B}) > 0)$.

Utled uttrykkene for $\text{E}(\mathcal{N}(\mathcal{B})|\mathcal{N}(\mathcal{B}) > 0)$ og $\text{Var}(\mathcal{N}(\mathcal{B})|\mathcal{N}(\mathcal{B}) > 0)$.

Betrakt to vilkårlige del-områder $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{D}$ og $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{D}$.

b) Spesifiser uttrykkene for $\text{E}(\mathcal{N}(\mathcal{B}_1))$, $\text{E}(\mathcal{N}(\mathcal{B}_2))$, $\text{Var}(\mathcal{N}(\mathcal{B}_1))$ og $\text{Var}(\mathcal{N}(\mathcal{B}_2))$. Utled uttrykket for $\text{Cov}(\mathcal{N}(\mathcal{B}_1), \mathcal{N}(\mathcal{B}_2))$

Sett inn i svaret $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ og $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ og diskuter resultatet.

c) Utled uttrykket for $\text{Prob}(\mathcal{N}(\mathcal{B}_2) = i|\mathcal{N}(\mathcal{B}_1) = j)$.

Sett inn i svaret $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ og diskuter resultatet.

Oppgave 3 MOSAIKK STOKASTISK FELT.

Betrakt et mosaikk stokastisk felt $L : \{L_x\ ; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ er et regulært grid med n noder på $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, og $L_x \in \Omega_l : \{W, B\}$. Det betyr at variablen L_x tilhører en av klassene hvit (W) eller svart (B) for hver $x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$.

Definer følgende gibbs modell for feltet:

$$\text{Prob}\{L = l; \beta\} = \text{const}_\beta \times \exp\{\beta \Sigma_{<u,v>} I(l_u = l_v)\}$$

hvor $u, v \in \mathcal{L}_\mathcal{D}$, $< u, v >$ representerer alle par av nærmeste naboer i gridet $\mathcal{L}_\mathcal{D}$ og $I(A)$ er en indikator funksjon som tar verdien 1 når A er sann og 0 ellers.

Det betyr at feltet er et ising stokastisk felt. Modellparameteren $\beta > 0$ antas å være kjent.

Betrakt observasjonene $O : \{O_x; x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\}$ hvor $O_x \in \{W, B\}$, det betyr at vi observerer et binært felt. La likelihood modellen være:

$$\text{Prob}\{O = o|L = l; p\} = \prod_{x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}} \text{Prob}\{O_x = o_x|L_x = l_x; p\}$$

hvor o_x sammenfaller med l_x med sannsynlighet $(1-p)$ og er misklassifisert til den andre klassen med sannsynlighet p. Modellparameteren $0 < p < 1$ antas å være kjent.

a) Demonstrer at markov formen for tilsvarende posteriori modell er:

$$\begin{aligned}&\text{Prob}\{L_x = l_x|O = o, L_{-x} = l_{-x}; \beta, p\}\\ &\quad = \text{const}_{\beta,p} \times \exp\{\ln[\frac{1-p}{p}]I(o_x = l_x) + \beta\Sigma_{<x,v>}I(l_x = l_v)\}; \forall x \in \mathcal{L}_\mathcal{D}\end{aligned}$$