Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4250 Romlig Statistikk**

Faglig kontakt under eksamen: Prof Jo Eidsvik

Tlf: 90127472

Eksamensdato: 28.mai 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C:
- Tabeller og Formler i Statistikk, Tapir
- NTNU sertifisert kalkulator
- Personlig, håndskrevet, gult jukseark - A5-format

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 KONTINUERLIGE STOKASTISKE FELT

Betrakt et en-dimensjonalt Gaussiak stokastisk felt $\{r(x); x \in \mathtt{D} \subset \mathbb{R}\}$ parametrisert ved

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{r(x)\} &= \mu_0 + \mu_1 g(x) \\ \mathrm{Var}\{r(x)\} &= \sigma^2 h(x) \\ \mathrm{Corr}\{r(x'), r(x'')\} &= \rho(x' - x'') \end{aligned}$$

hvor $\{g(x); x \in \mathtt{D}\}; g(x) \in \mathbb{R}$ og $\{h(x); x \in \mathtt{D}\}; h(x) \in \mathbb{R}_\oplus$ er kjente funksjoner over $\mathtt{D}$. De andre parametrene er $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}_\oplus$ og $\rho(\tau) \in [-1, 1]; \tau \in \mathbb{R}$. Anta at modelparametrene σ^2 and $\rho(\tau)$ er kjente, mens μ_0, μ_1 er ukjente.

a) Spesifiser de matematiske krav for at $\rho(\tau)$ skal være en gyldig romlig korrelasjons funksjon.

Anta at det Gaussiake stokastiske feltet over $\mathtt{D}$ er eksakt observert ved $[r(x_1), r(x_2), \ldots, r(x_n)]$.

b) Betrakt en vilkårlig posisjon $x_0 \in \mathtt{D}$, og definer den lineære prediktoren,

$$\hat{r}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r(x_i)$$

med ukjente vekter $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ som skal bestemmes.

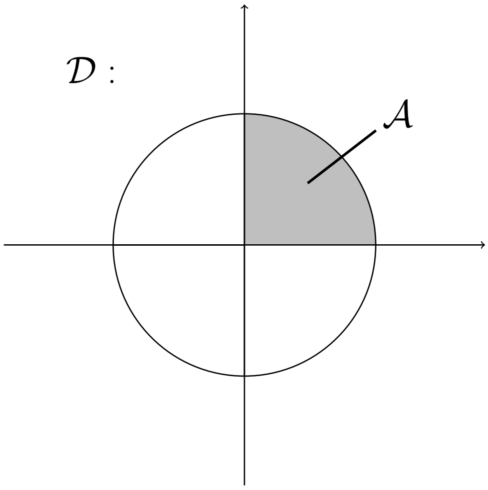
Utled uttrykket til det minimeringssystemet som må løses for å bestemme vektene til beste lineære forventningsrette prediktor (BLUP) under kvadratisk tapsfunksjon.

c) Betrakt de lineære estimatorene for de ukjente modelparametrene,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0 &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i^0 r(x_i) \\ \hat{\mu}_1 &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i^1 r(x_i) \end{aligned}$$

med ukjente vekter $[\beta_1^0, \beta_2^0, \ldots, \beta_n^0]$ og $[\beta_1^1, \beta_2^1, \ldots, \beta_n^1]$ som skal bestemmes.

Utled uttrykkene for de to minimeringssystemene som må løses for å bestemme vektene til de beste lineære forventningsrette estimatorene (BLUE) under kvadratisk tapsfunksjon for henholdsvis μ_0 and μ_1 .



Figur 1: Domener.

Oppgave 2 HENDELSES STOKASTISKE FELT

Betrakt et stasjonært Poisson punkt stokastisk felt representert ved $\{x_i; i = 1, \ldots, n\}$; $x_i \in \mathtt{D} \subset \mathbb{R}^2; n \in \mathbb{N}_\oplus$ med model intensitetsparameter $\lambda \geq 0$. La domenet $\mathtt{D}$ være en rund disk sentrert i origo $(0, 0)$ med radius r.

Definer en del-mengde $\mathtt{A} \subset \mathtt{D}$, hvor $\mathtt{A}$ er den øvre-høyre kvart-sektor av disken $\mathtt{D}$, se Figur 1.

La $k_\mathtt{D} \in \mathbb{N}_\oplus$ og $k_\mathtt{A} \in \mathbb{N}_\oplus$ benevne antallet punkter i domenene henholdsvis $\mathtt{D}$ and $\mathtt{A}$.

a) Utled uttrykk for $\mathrm{E}\{k_\mathtt{D}\}, \mathrm{E}\{k_\mathtt{A}\}, \mathrm{Var}\{k_\mathtt{D}\}, \mathrm{Var}\{k_\mathtt{A}\}$ samt $\mathrm{Cov}\{k_\mathtt{D}, k_\mathtt{A}\}$.

b) Anta først at $k_\mathtt{D}$ er ukjent, og at en har observert $k_\mathtt{A} = k$. Spesifiser uttrykket for $\mathrm{Prob}\{k_\mathtt{D} = i | k_\mathtt{A} = k\}, i \in \mathbb{N}_\oplus$.

Anta deretter at $k_\mathtt{A}$ er ukjent, og at en har observert $k_\mathtt{D} = k$. Spesifiser uttrukket for $\mathrm{Prob}\{k_\mathtt{A} = i | k_\mathtt{D} = k\}, i \in \mathbb{N}_\oplus$.

c) Anta her at $k_\mathtt{D}$ er ukjent, og at en har observert $k_\mathtt{A} = k \geq 1$.

Betrakt senter-posisjonen i $\mathtt{D}$, som er origo, og definer d til å være avstanden fra denne senter-posisjonen til det nærmeste punktet i det stokastiske punkt-feltet.

Utled et uttrykk for sannsynlighetstettheten $p(d | k_\mathtt{A} = k); d \in \mathbb{R}_\oplus$.

Oppgave 3 MOSAIKK STOKASTISKE FELT.

Betrakt et en-dimensjonalt Markov stokastisk felt (Markov random profile) $\{l_x\ ; x \in \mathcal{L}_{\mathtt{D}}\}$ hvor $\mathcal{L}_{\mathtt{D}}$ er et regulært grid med n noder over $\mathtt{D} \subset \mathbb{R}$, representert ved n-vektoren $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$. La $l_x \in \Omega_l : \{W, B\}$. Herved tilhører l_x en av klassene hvit (W) eller svart (B) for hver $x \in \mathcal{L}_{\mathtt{D}}$.

Definer følgenede Gibbs-formulering for profilen,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{l}) &= const \times \prod_{<u,v>} \beta^{I(l_u = l_v)} \\ &= const \times \prod_{i=1}^{n-1} \beta^{I(l_i = l_{i+1})} \end{aligned}$$

hvor $u, v \in \mathcal{L}_{\mathtt{D}}$, $< u, v >$ representerer alle par av nærmeste nabo-noder på gridet $\mathcal{L}_{\mathtt{D}}$ og $I(A)$ er en indikator-funksjon som tar verdien 1 når A er sann og 0 ellers. Herved er profilen en stokastisk Ising profil. Modell-parameteren $\beta \geq 1$ er antatt kjent.

a) Utled uttrykket for Markov-formuleringen av den stokastiske profilen, altså $p(l_i|\mathbf{l}_{-i}); i = 1, 2, \ldots, n$. Hold øye med rand-uttrykkene.

b) Enhver sannsynlighetstetthetsfordeling for en fler-dimensjonal tilfeldig variabel kan bli sekvensielt dekomponert,

$$p(\mathbf{l}) = p(l_1) \prod_{i=2}^{n} p(l_i|l_{i-1}, \ldots, l_1).$$

Utled uttrykket for $p(l_i|l_{i-1}, \ldots, l_1); i = 2, 3, \ldots, n$ basert på Gibbs-formuleringen av den stokastiske profilen. Demonstrer at denne sekvensielle dekomponeringen definerer en første-ordens Markov kjede langs profilen.