LØSNINGSFORSLAG

FAG 75563 ROMLIG STATISTIKK

VÅR 1997

Onsd. 4. juni 1997

H. Omre

OPPGAVE 1 SEKVENSIELL ALGORITME

Stokastisk kontinuerlig felt $\{R(x); x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2\}$

a) Betrakt dekomposisjonen:

$$f_{\underline{R}}(\underline{r}) = f_{R_1,\dots,R_m}(r_1,\dots,r_m)$$

$$= f_{R_m|R_{m-1},\dots,R_1}(r_m|r_{m-1},\dots,r_1)$$

$$\times f_{R_{m-1}|R_{m-2},\dots,R_1}(r_{m-1}|r_{m-2}\dots r_1)$$

$$\times$$

$$\vdots$$

$$\times f_{R_2|R_1}(r_2|r_1)$$

$$\times f_{R_1}(r_1)$$

Ved å neste seg nedenfra kan en se at den sekvensielle algoritmen er korrekt.

~~For~~ at algoritmen skal fungere må en ha explisitte uttrykk for

$$f_{R_l|R_{l-1},\dots,1}(r_l|r_{l-1},\dots,r_1) \quad ; \text{ alle } l$$

eller tilsvarende

$$f_{R_l,\dots,R_1}(r_l,\dots,r_1) \qquad \text{alle } l.$$

b) I Gaussiske kontinuerlige felt vil:

$$f_{R_l,\dots,R_1}(r_l,\dots,r_1) \Rightarrow N_l(\underline{\mu}, \Sigma) \quad \text{alle } l$$

dvs

$$f_{R_l|R_{l-1},\dots,R_1}(r_l|r_{l-1},\dots,r_1) \Rightarrow N_1(\mu_{l|\cdot}, \sigma^2_{l|\cdot})$$

hvor

$$\mu_{l|\cdot} = E\{R_l | R_{l-1}=r_{l-1},\dots,R_1=r_1\} = \text{kjent uttrykk}$$

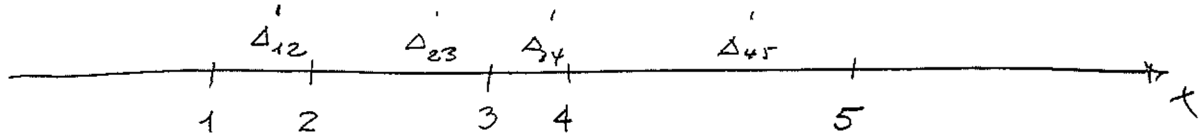
$$\sigma^2_{l|\cdot} = Var\{R_l | R_{l-1}=r_{l-1},\dots,R_1=r_1\} - \text{kjent uttrykk}$$

I uttrykkene $\mu_{l|\cdot}$ og $\sigma^2_{l|\cdot}$ inngår Σ^{-1} hvor Σ er av dimensjon $l-1$. Dekomponering av denne matrisen kan være umulig for store l.

En mulig approksimasjon er å kun inkludere de gridnodene blant $\{l-1,\dots,1\}$ som ligger nærmest l i betingingen. Dvs at Σ blir av lavere dimensjon.

OPPGAVE 2 MARKOV-EGENSKAP

Stokastisk kontinuerlig prosess $\{R(x);\ x \in \mathcal{D} \subset R^1\}$



Dvs at $(R(x_1), \dots, R(x_5)) \rightsquigarrow N_5(\underline{\mu}, \Sigma)$

samt

$$R(x_3) \mid R(x_1), R(x_2), R(x_4), R(x_5) \rightsquigarrow N(\mu_{3|1,2,4,5}, \sigma^2_{3|1,2,4,5})$$

med

$$\mu_{3|1,2,4,5} = E\{R(x_3) \mid R(x_1), R(x_2), R(x_4), R(x_5)\}$$

$$\sigma^2_{3|1,2,4,5} = Var\{R(x_3) \mid R(x_1), R(x_2), R(x_4), R(x_5)\}$$

Fordi Gaussiske pdf er entydig definert av μ og σ^2 krever Markovegenskapen at:

$$\mu_{3|1,2,4,5} = \mu_{3|2,4}$$

$$\sigma^2_{3|1,2,4,5} = \sigma^2_{3|2,4}$$

Betrakt:

$$\mu_{3|1,2,4,5} = \mu + \Sigma'_{\cdot 3}\, \Sigma^{-1}_{\cdot\cdot}(x_{\cdot} - \mu_{\cdot})$$

$$\sigma^2_{3|1,2,4,5} = \sigma^2 - \Sigma'_{\cdot 3}\, \Sigma^{-1}_{\cdot\cdot}\, \Sigma_{\cdot 3}$$

med kritiske element:

$$\Sigma_{\cdot 3} = \sigma^2 [e^{-\Delta_{13}}, e^{-\Delta_{23}}, e^{-\Delta_{34}}, e^{-\Delta_{35}}]'$$

$$\Sigma_{\cdot\cdot} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & e^{-\Delta_{12}} & e^{-\Delta_{14}} & e^{-\Delta_{15}} \\ e^{-\Delta_{12}} & 1 & e^{-\Delta_{24}} & e^{-\Delta_{25}} \\ e^{-\Delta_{14}} & e^{-\Delta_{24}} & 1 & e^{-\Delta_{45}} \\ e^{-\Delta_{15}} & e^{-\Delta_{25}} & e^{-\Delta_{45}} & 1 \end{bmatrix}$$

med

$$\Delta_{ij} = \alpha |x_i - x_j|$$

Den viktige faktor som kan eliminere observasjon 1 og 5 er:

$$\beta' = \Sigma_{.3}' \Sigma_{..}^{-1} \quad \text{med} \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_4, \beta_5)'$$

en har

$\Sigma_{..} \beta = \Sigma_{.3}$ – et sett av fire lineært, uavhengige lineære likninger med fire ukjente. Det finnes altså en unik løsning for

Dersom vi kan vise at $\beta_1 = \beta_5 = 0$ i denne løsningen så er vi 'i havn'.

Multipliser 1. likning med $e^{\Delta_{12}}$ og 4. likn. med e

$$\begin{bmatrix} e^{\Delta_{12}} & 1 & e^{-\Delta_{24}} & e^{-\Delta_{25}} \\ e^{-\Delta_{12}} & 1 & e^{-\Delta_{24}} & e^{-\Delta_{25}} \\ e^{-\Delta_{14}} & e^{-\Delta_{24}} & 1 & e^{-\Delta_{45}} \\ e^{-\Delta_{14}} & e^{-\Delta_{24}} & 1 & e^{\Delta_{45}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\Delta_{23}} \\ e^{-\Delta_{23}} \\ e^{-\Delta_{34}} \\ e^{-\Delta_{34}} \end{bmatrix}$$

Dersom en setter $\beta_1 = \beta_5 = 0$ blir en sittende med fire likninger og to ukjente, β_2 og β_4. Likningene er imidlertid lineært avhengige og kun av rank to, dvs

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-\Delta_{24}} \\ e^{-\Delta_{24}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\Delta_{23}} \\ e^{-\Delta_{34}} \end{bmatrix}$$ – som har unik løsning for β_2, β

Dette tilsvare $\Sigma_{..} \beta = \Sigma_{.3}$ for $R(x_3) | R(x_2), R($

QED.

OPPGAVE 3 SAMPLING I PUNKTMODELLER

Stokastisk punktfelt $\{X_i ; i=1, .., n\}$; $X \in D \subset \mathbb{R}^2$

$$f_{X_1,..,X_n}(x_1, .., x_n) = \text{konst} \times \exp\left\{\sum_i^n a(x_i) + \sum_i^n \sum_{\substack{j \\ i\neq j}}^n b(x_i, x_j)\right\}$$

a) Anta $b(x_i, x_j) = 0.0$ alle x_i, x_j

Dvs:

$$f_{X_1 .. X_n}(x_1, .., x_n) = \text{konst} \cdot \prod_i^n \exp\{a(x_i)\} = \prod_i^n f_X(x_i)$$

Det er da åpenbart at den sekvensielle simuleringsalgoritme med

$$f_{X_l | X_{l-1}, .., X_1}(x_l | x_{l-1}, .., x_1) = f_X(x_l)$$

kan benyttes. Dvs at punktene kan legges ut uavhengig av hverandre. Rejektion sampling kan f.eks. brukes for hvert punkt.

b) Avhengighet mellom punktene krever en Metropolis-Hastings algoritme.

Definer forslagskjernen:

- $l \sim \text{Uni}[\{1, .., n\}]$ - uniform over settet $\{1, ..$
- $x' \sim \text{Uni}[D]$ - uniformt over domene D
- $y = (x_1, .., x_{l-1}, x', x_{l+1}, .., x_n)$

Det vil si kjerne $q_{xy} = q_{yx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|D|}$, altså symmetrisk

Det gir

$$\alpha_{x,y} = \min\left\{1, \frac{f_X(y)}{f_X(x)}\right\}$$

$$= \min\left\{1, \exp\left\{a(x') - a(x_l) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq l}}^n b(x', x_i) - b(x_l, x_i)\right\}\right\}$$

c) Denne algoritmen har forslagskjernen:

- $l \sim \text{Uni}[\{1,..,n\}]$ - uniformt over settet $\{1,..,n\}$
- $x' \sim \text{Uni}[A_{x_l} \cap D]$ - uniformt over domenet $A_{x_l} \cap D$
- $y = (x_1, .., x_{l-1}, x', x_{l+1}, .., x_n)$

Dvs. at kjernen er:

$$q_{xy} = \frac{1}{n} \frac{1}{|A_{x_l} \cap D|}$$

$$q_{yx} = \frac{1}{n} \frac{1}{|A_{x'} \cap D|}$$

MERK! Domenet A, må være rotasjonssymmetrisk slik at $q_{xy} > 0 \Rightarrow q_{yx} > 0$

dvs $q_{xy} \neq q_{yx}$

Det gir:

$$\alpha_{xy} = \min\left\{1, \frac{f_{\underline{x}}(\underline{y})}{f_{\underline{x}}(\underline{x})} \cdot \frac{q_{yx}}{q_{xy}}\right\}$$

$$= \min\left\{1, \exp\left\{a(x') - a(x_l) + \sum_{i \neq l}^{n} b(x', x_i) - b(x_l, x_i)\right\} \frac{|A_{x'} \cap D|}{|A_{x_l} \cap D|}\right\}$$