SIF5064 Romlig Statistikk, våren 2001
Øving 3: Markovfelt

Innlevering innen mandag 30.04 kl 16.00.

Oppgave 1. Simulering og parameterestimering

Vi skal i denne oppgaven se på et Markovfelt med første ordens naboskap (på et vanlig rektangulært grid) der simultanfordelingen er gitt ved

$$f(x) = \text{konst}\exp\left\{\sum_{i\sim j}\left(\beta_0\mathbf{1}_{[x_i=0,x_j=0]} + \beta_1\mathbf{1}_{[x_i=1,x_j=1]}\right)\right\},$$

der $x = (x_1, \ldots, x_n)$ og $x_i \in \{0, 1\}$. Merk at dette kan betraktes som en generalisering av Ising-modellen siden $\beta_0 = \beta_1$ gir tilbake Ising-modellen.

(**a**) Spesifiser og implementer en MCMC-algoritme for å simulere fra modellen. [**Merk**: Splus egner seg dårlig til dette siden den takler for-løkker dårlig. Matlab er derimot velegnet.] Simuler realisasjoner for tre valg av parameterverdier, deriblant for $\beta_0 = \beta_1 = 0.23$.

[**Hint**: Det kan fort ta noen minutter å simulere f.eks. et 32×32-grid i Matlab, tenk derfor nøye gjennom hvordan dere implementerer algoritmen. I Matlab finnes det en rutine `profile` som gir informasjon om tidsbruk i et program. Skriv `help profile` for en beskrivelse av rutinen. Forøvrig er det bare å spørre om hjelp for å komme i gang med Matlab.]

(**b**) Skriv opp pseudolikelihoodfunksjonen for modellen gitt over. Ta utgangspunkt i realisasjonen som er simulert med $\beta_0 = \beta_1 = 0.23$ og estimer β_0 og β_1 ved å maksimere pseudolikelihoodfunksjonen. [Dette kan gjøres enten i Matlab eller Splus. I Matlab er funksjonen `fmins` velegnet.]

Oppgave 2. Bayesiansk bildebehandling

Anta at vi har observert et bilde (med støy) $y = \{y_{ij}; i, j = 1, \ldots, n\}$ der $y_{ij} \in (-\infty, \infty)$. Fra dette ønsker vi å estimere det sanne bildet, $x = \{x_{ij}; i, j = 1, \ldots, n\}$, uten støy. For dette setter en opp følgende Bayesianske modell: En antar at x er et binært bilde ($x_{ij} \in \{0,1\}$) generert fra en Ising-modell med en kjent interaksjonsparameter β. Videre antar en at y er generert fra x via en glattingsoperasjon og at støy deretter er addert, mer spesifikt at

$$y_{ij} = \frac{1}{9} \sum_{(k,l)\in A_{ij}} x_{kl} + \varepsilon_{kl},$$

der $A_{ij} = \{(k,l) : |k-i| \leq 1 \text{ og } |l-j| \leq 1\}$, dvs. A_{ij} består av 3×3 piksler sentrert i piksel (i,j) (unntatt dersom (i,j) ligger på randen av bildet, i så fall vil A_{ij} bestå av færre piksler), og ε_{kl} er normalfordelt med forventning null og (kjent) varians σ^2. Anta dessuten at støyen ε_{kl} i ulike piksler er uavhengig.

(**a**) Skriv opp uttrykket for apriorfordelingen $f(x)$ og for likelihoodfunskjonen $f(y|x)$ ut fra antagelsene gjort over.

(**b**) Vis at også aposteriorfordelingen $f(x|y)$ blir et Markovfelt. Spesifiser spesielt hvilke naboskap du nå får og hva potensialfunksjonene blir. (Det er tilstrekkelig at du spesifiserer hva naboskapstruktur og potensialfunskjoner er for piksler og klikker som ligger tilstrekklig langt vekk fra kanten av bildet. Nær kanten får man en del spesialtilfeller på grunn av "manglende" piksler.)

(**c**) La $\widehat{x} = \mathrm{E}[x|y]$ være den estimator du velger å bruke for å estimere det sanne bildet. Beskriv hvordan du beregningsmessig vil gå frem for å bestemme estimatene (Det kreves ikke at dere implementerer eller utfører dette).