



Faglig kontakt under eksamen:
Mette Langaas (988 47 649)

BOKMÅL

EKSAMEN I TMA4255 ANVENDT STATISTIKK

Fredag 25. mai 2012
Tid: 9:00–13:00

Antall studiepoeng: 7.5.

Tillatte hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler. Spesiell kalkulator.

Sensurfrist: 18. juni 2012.

Eksamensresultatene annonseres fra <http://studweb.ntnu.no/>.

Merk deg følgende:

- Signifikansnivå 5% skal brukes hvis ikke annet er spesifisert.
- Alle svar må begrunnes.

Oppgave 1 Vitamin C

I en medisinsk studie på marsvin ble det benyttet to ulike kilder til vitamin C-inntak. Disse var appelsinjuice (tilskudd 1) og syntetisk askorbinsyre (tilskudd 2). Responsmålet som ble brukt var lengden til odontoblastceller i fortennene til marsvinene. Forskerne hadde som mål å finne ut om det var en forskjell i dette responsmålet for de to tilskuddene.

X_1, X_2, \dots, X_{n_1} angir odontoblastlengdene til et tilfeldig utvalg av n_1 marsvin som fikk tilskudd 1 og Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} angir odontoblastlengdene til et tilfeldig utvalg av n_2 marsvin som fikk tilskudd 2. Vi antar at $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$, $E(Y_j) = \eta$ og $\text{Var}(Y_j) = \tau^2$ for $i = 1, 2, \dots, n_1$ og $j = 1, 2, \dots, n_2$, og at de to tilfeldige utvalgene er uavhengige.

Totalt fikk $n_1 = 10$ marsvin tilskudd 1 og $n_2 = 10$ marsvin tilskudd 2. Datasettet finner du (sortert) i tabellen under. Lengdene er i mikrometer (10^{-6} meter).

Tilskudd	Observasjoner									
Tilskudd 1: Appelsinjuice	8.2	9.4	9.6	9.7	10.0	14.5	15.2	16.1	17.6	21.5
Tilskudd 2: Askorbinsyre	4.2	5.2	5.8	6.4	7.0	7.3	10.1	11.2	11.3	11.5

Deskriptive mål for datasettet er $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 13.18$, $\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} y_j = 8.00$, $s_x = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2} = 4.44$, og $s_y = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{j=1}^{10} (y_j - \bar{y})^2} = 2.77$.

- a) Skriv ned nullhypotesen og den alternative hypotesen som forskerne ønsker å teste. Hvilke antagelser må du gjøre for å kunne bruke en to-utvalgs t -test? Er det fornuftig å anta at variansene σ^2 og τ^2 er like? Her kan du bruke signifikansnivå $\alpha = 0.02$ hvis du velger å utføre en test for å undersøke om variansene er ulike. Utfør en t -test. Vil du konkludere med at det er forskjell i lengden til odontoblastcellene i en populasjon som bruker tilskudd 1 og en populasjon som bruker tilskudd 2?
- b) Et alternativ til en to-utvalgs t -test er Wilcoxon rang-sum-test (også kalt Mann-Whitney test). Hvilke antagelser bygger Wilcoxon rang-sum-testen på? Når bør du bruke Wilcoxon rang-sum-test istedenfor to-utvalgs t -test? Utfør Wilcoxon rang-sum-testen for dataene i tabellen over. Vil du konkludere med at det er forskjell i lengden til odontoblastcellene i en populasjon som bruker tilskudd 1 og en populasjon som bruker tilskudd 2?

Oppgave 2 Kjemisk produkt

Vi skal studere en kjemisk prosess og lage en statistisk modell som relaterer mengden kjemisk produkt til temperatur og trykk for den kjemiske prosessen. Vi bruker følgende notasjon.

- y , produkt. Mengden produkt fra den kjemiske prosessen.
- x_1 , temperatur. Temperaturen som ble brukt under prosessen.
- x_2 , trykk. Trykket som ble brukt under prosessen.

Den kjemiske prosessen ble kjørt for $n = 21$ ulike kombinasjoner av temperatur og trykk, og mengden produkt ble målt.

En multipel lineær regresjonsmodell kan brukes til å analysere dataene. La (y_i, x_{1i}, x_{2i}) være målingene gjort ved i te kjøring av prosessen.

$$\text{Modell A } y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} x_{2i} + \varepsilon_i$$

Her er ε_i u.i.f. $N(0, \sigma^2)$ for $i = 1, \dots, n$.

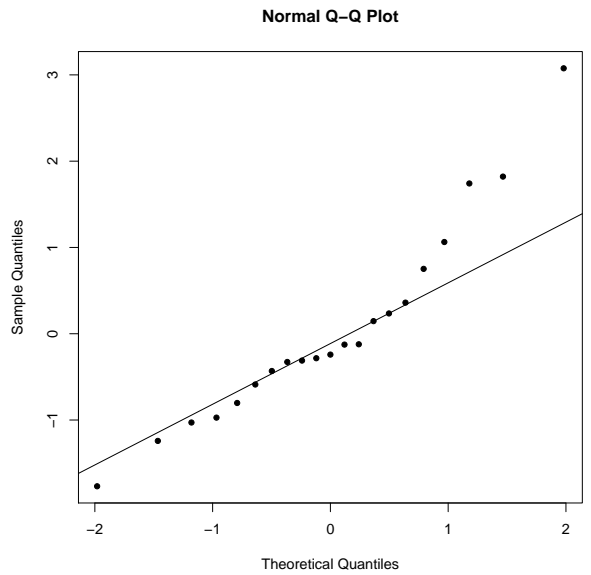
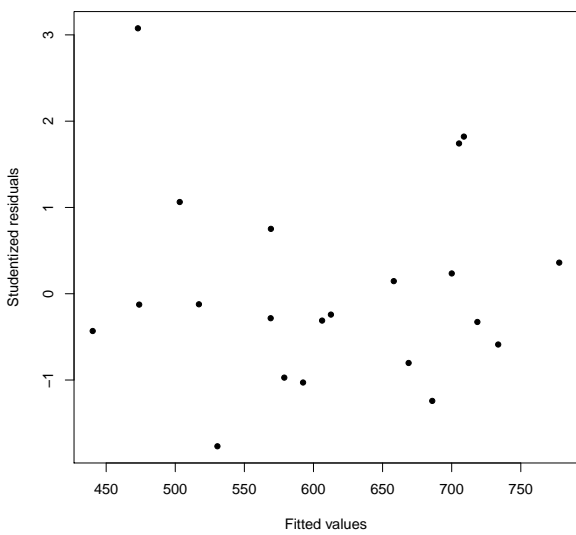
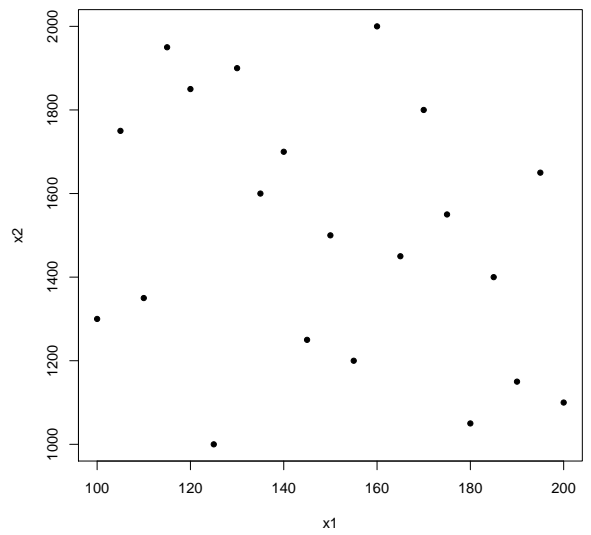
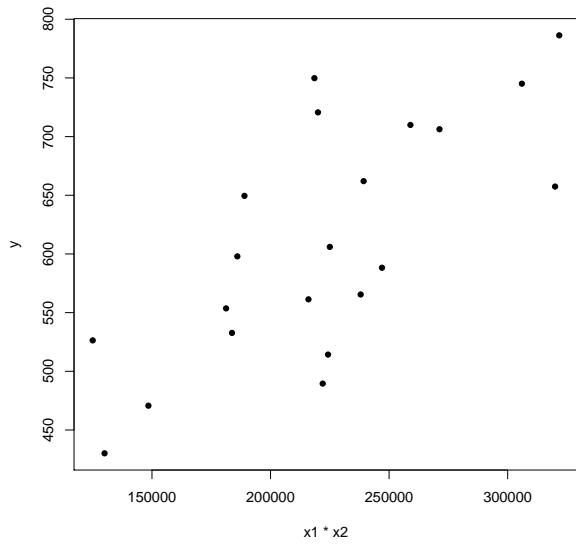
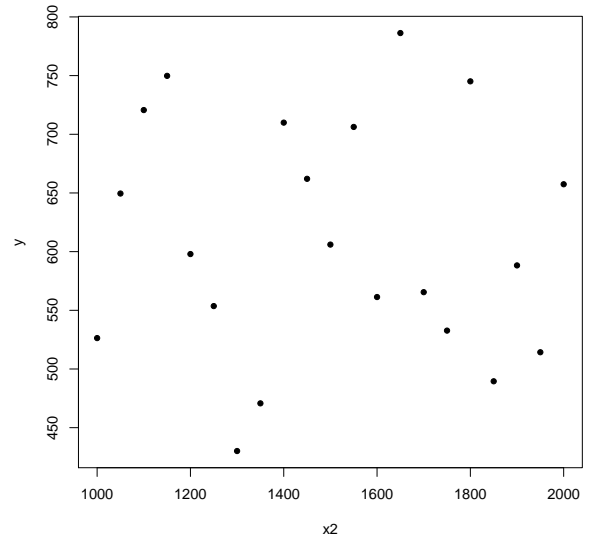
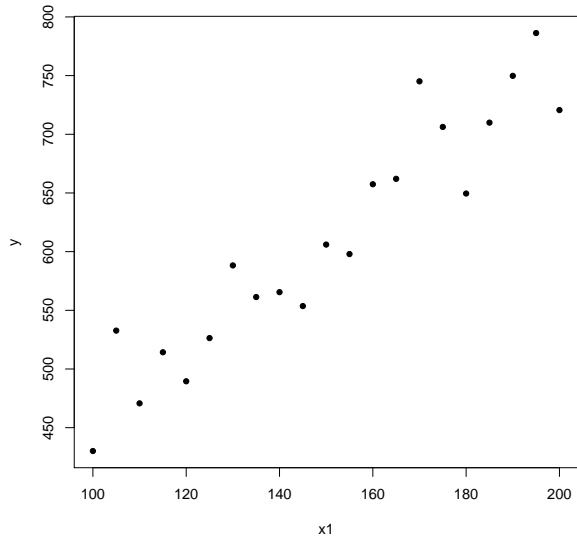
Spredningsplott (scatter plots) finner du på side 4 (øvre og midtre rad). Modell A ble tilpasset til dataene, og resultatet finner du på side 5. Plott av studentiserte residualer er på side 4 (nedre rad).

a) Skriv ned den tilpassede regresjonsmodellen.

Hva er estimatet for σ^2 ?

Det er gitt en p -verdi i raden for \mathbf{x}_2 i resultatene. Forklar med ord hva denne p -verdien betyr.

Basert på plottene og regresjonsresultatene, vil du si at modell A er en god modell for dataene? Du må spesifisere hvilke egenskaper til plottene og regresjonsresultatene du bruker for å komme frem til svaret ditt.



Regression analysis					
Predictor	Coef	SE Coef	T	P	
Constant	181.8	156.6	1.16	0.262	
x1	2.146	1.018	2.11	0.050	
x2	-0.0440	0.1043	-0.42	0.678	
x1*x2	0.0007774	0.0006942	1.12	0.278	
S = 27.2502 R-Sq = 93.8% R-Sq(adj) = 92.7%					
Analysis of Variance					
Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	3	190830	63610	85.66	1.825e-10
Residual Error	17	12624	743		
Total	20	203454			

Anta at et konstantledd, β_0 , er med i regresjonsmodellen. Vi skal nå se på ulike regresjonsmodeller, der vi har med ulike kombinasjoner av forklaringsvariablene x_1 , x_2 og x_1x_2 . Resultater fra tilpasningen av modellene er presentert i tabellen under. Hver rad i tabellen svarer til en modell. Antallet forklaringsvariabler inkludert i hver modell finner du i kolonnen med navn **par** (ikke medregnet konstantleddet). I kolonnen med navn **MSE** finner du gjennomsnittlig kvadratavvik (mean squared error) til regresjonen.

	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	par	MSE	R2	R2.adj	C_p
1	151	3.067			1	1179	89.0	88.4	13.2
2	641		-0.020		1	10667	0.4	-4.9	255.9
3	315			0.001	1	5093	52.4	49.9	113.3
4	15	3.263	0.071		2	753	93.3	92.6	3.3
5	117	2.563		0.0005	2	709	93.7	93.0	2.2
6	505		-0.258	0.002	2	885	92.2	91.3	?
7	182	2.146	-0.044	0.001	3	743	93.8	92.7	4.0

- b) I kolonnen helt til høyre i tabellen finner du Mallows C_p . Ett av tallene i denne kolonnen er erstattet med et spørsmålstegn. Skriv ned definisjonen av C_p og regn ut den manglende C_p -verdien.

Forklar hvordan du kan bruke C_p til å sammenligne de ulike regresjonsmodellene.

Hvilken av disse 7 regresjonsmodellene mener du er den «beste» for dette datasettet?

Oppgave 3 Behandling av tennisalbue

Uttrykket *tennisalbue* brukes om en betennelsestilstand i albuen, som forårsaker smerter. Tilstanden er vanlig hos personer som driver med racketsport, men enhver aktivitet som involverer gjentatt vridning av håndleddet (som ved å bruke et skrujern) kan forårsake denne tilstanden. Tilstanden kan også skyldes konstant bruk av tastatur eller mus.

I en randomisert klinisk studie ønsket man å sammenligne tre ulike behandlingsmåter for tennisalbue, A: fysioterapi, B: injeksjon med steroider og C: vent-og-se (pasientene i vent-og-se gruppen fikk ikke noen behandling, men ble bedt om å belaste albuen så lite som mulig).

Vi skal se på korttidseffekt av behandling ved å se på målinger etter 6 uker. Alle deltakerne i studien hadde bare en arm med tilstanden tennisalbue. Flere responsmål ble registrert i studien, og vi vil i det følgende se på to ulike responsmål.

- a) Behandlingen ble regnet som en suksess hvis pasienten vurderte at hun/han var blitt mye bedre eller helt bra (en standardisert forbedringsskala ble brukt). Antallet suksesser og fiaskoer etter 6 ukers behandling finner du i tabellen under.

Behandling	Fiasko	Suksess	Totalt
A (fysioterapi)	22	41	63
B (injeksjon)	14	51	65
C (vent-og-se)	44	16	60
Totalt	80	108	188

Vil vil undersøke om suksessraten er ulik for behandlingene. Skriv ned nullhypotesen og den alternative hypotesen og utfør en hypotesetest på grunnlag av informasjonen i tabellen over. For å forenkle beregningsbyrden kan det oppgis at χ^2 -testobservatoren blir 36.6, og du trenger bare å vise hvordan du regner ut ett av de 6 leddene i summen.

Hvilke antagelser må du gjøre for å bruke denne testen?

Hva er din konklusjon basert på denne testen?

Vi skal nå se på et responsmål som kalles *smertefri gripestyrke*. Dette ble målt med et digitalt dynamometer og normalisert til gripestyrken i den friske armen. En smertefri gripestyrke på 100 betyr at den affiserte armen og den ikke-affiserte armen fungerer like godt. Deskriptive mål for hver av behandlingsgruppene er presentert i tabellen på toppen av side 7.

Behandling	Utvalgsstørrelse	Gjennomsnitt	Standardavvik
A (fysioterapi)	63	70.2	25.4
B (injeksjon)	65	83.6	22.9
C (vent-og-se)	60	51.8	23.0
Totalt	188	69.0	

- b) Vi ønsker å undersøke om den forventede smertefrie gripestyrken varierer mellom behandlingsgruppene. Skriv ned nullhypotesen og den alternative hypotesen og utfør en hypotesetest basert på de deskriptive målene i tabellen over.
Hvilke antagelser må du gjøre for å kunne bruke denne testen?
Hva er din konklusjon basert på denne testen?

- c) Vi ønsker å parvist sammenligne den forventede smertefrie gripestyrken for alle behandlingsgruppene. Anta nå at utvalgsstørrelsene for alle behandlingene er $n_A = n_B = n_C = 63$ og at gjennomsnitt og empirisk standardavvik for hver behandlingsgruppe er som gitt i tabellen over.

Utfør sammenligningene ved å konstruere simultane konfidensintervall for den forventede differansen i smertefri gripestyrke mellom alle par av behandlinger ved å bruke Tukeys metode. Bruk et overordnet konfidensnivå på 95% for alle sammenligningene.

Hvilke antagelser må du gjøre?

Finn det felles individuelle konfidensnivået som er brukt for hver av sammenligningene.

- d) La μ_A angi den forventede smertefrie gripestyrken i en populasjon der fysioterapi blir brukt for behandling av tennisalbue, og la μ_C angi den forventede smertefrie gripestyrken i en populasjon der vent-og-se brukes. Definer den relative differansen mellom disse to forventningsverdiene som

$$\gamma = \frac{\mu_A - \mu_C}{\mu_C}.$$

Dette kan fortolkes som den forventede relative økningen i smertefri gripestyrke når fysioterapi brukes istedenfor vent-og-se behandling. Foreslå en estimator, $\hat{\gamma}$, for γ basert på to uavhengige utvalg av størrelse n_A og n_C fra fysioterapi og vent-og-se-behandlingsgruppene.

Bruk tilnærmede metoder til å finne forventningsverdi og varians til denne estimatoren, $E(\hat{\gamma})$ og $\text{Var}(\hat{\gamma})$.

Bruk utvalgsstørrelsene, gjennomsnittene og de empiriske standardavvikene for fysioterapi og vent-og-se behandlingsgruppene som er presentert i tabellen på toppen av denne siden til å regne ut numerisk verdi for $\hat{\gamma}$ og estimere numeriske verdier for $E(\hat{\gamma})$ og $\text{Var}(\hat{\gamma})$.

Hvis du fikk vite at de to utvalgene ikke var uavhengige, hvordan ville det påvirke approksimasjonen du har funnet for $E(\hat{\gamma})$ og $\text{Var}(\hat{\gamma})$?