NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4267 Lineære statistiske modellar**

Fagleg kontakt under eksamen: Mette Langaas

Tlf: 988 47 649

Eksamensdato: 4. juni 2016

Eksamenstid (frå–til): 09.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Gult, stempla A5-ark med dine eigne handskrivne notat, Tabeller og formler i statistikk (Tapir forlag/Fagbokforlaget), K. Rottmann: Matematisk formelsamling. Bestemd kalkulator.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 10

Sidetal vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1 Uavhengige stokastiske variablar

La $\boldsymbol{X}$ vere ein bivariat normalfordelt stokastisk variabel med $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. La $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$.

a) Finn fordelinga til $\boldsymbol{Y}$.

Spesifiser a, b slik at $\boldsymbol{Y}$ og $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$ er uavhengige stokastiske variablar. Grunngje svaret ditt.

Oppgåve 2 Plantestress

Forskarar ved Institutt for biologi, NTNU, nyttar modell-planten *Arabidopsis thaliana* for å studere korleis plantar reagerar på ulike kjelder til stress. I eit forsøk vart plantar utsette for ein stress-situasjon der følgjande faktorar inngjekk:

- D (skade): $D = 1$ tyder at planten blei skada mekanisk ved at blada vart klippa med ei saks. $D = -1$ tyder ingen mekanisk skade (inga klipping).
- F (flagellin): $F = 1$ tyder at det patogen-deriverte peptidet flagellin vart spraya på blada til planten. $F = -1$ tyder at berre vatn (ikkje flagellin) vart spraya på planten.
- T (tid): Plantane vart hausta ved to ulike tider etter stress-situasjonen. $T = 1$ tyder at planten vart hausta 60 minutt etter stress-situasjonen og $T = -1$ tyder at planten vart hausta 30 minutt etter stress-situasjonen.

Dermed inngår tre faktorar, D, F and T, som kvar kan ta to verdiar. Forskarane gjorde eksperiment med alle dei mogelege kombinasjonane av dei tre faktorane fire gonger, slik at det totalt vart utførte 32 eksperiment.

Responsen som vart målt i forsøka var det observerte aktivitetsnivå (ei kontinuerleg måling) for kvar av rundt 40 000 gen. Vi vil berre studere aktivitetsnivået til eitt gen, AT1G32920-genet, og vi kallar aktivitetsnivået til genet Y. Det er kjent at dette genet er aktivt ved skade på planten.

For eksperiment nummer i (der $i = 1, \ldots, 32$): Y_i er den observerte responsen, D_i er den valde verdien for D, F_i er den valde verdien for F, og T_i er den valde verdien for T. Ein multippel regresjonsmodell med alle hovudeffekter, og to- og tre-vegs samspel, vart tilpassa

$$Y_i = \beta_0 + \beta_D D_i + \beta_F F_i + \beta_T T_i + \beta_{D:F} D_i F_i + \beta_{D:T} D_i T_i + \beta_{F:T} F_i T_i + \beta_{D:F:T} D_i F_i T_i + \varepsilon_i,$$

der $i = 1, \ldots, 32$, og vi antar at ε_i er uavhengige og identisk normalfordelt med forventningsverdi 0 og varians σ^2. Vi kallar dette den *fulle modellen*. Merk at samspela er produkta av faktorane. Vektoren med regresjonsparametrar er $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix}\beta_0 & \beta_D & \beta_F & \beta_T & \beta_{D:F} & \beta_{D:T} & \beta_{F:T} & \beta_{D:F:T}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, og den $i$te rada av designmatrisa $\boldsymbol{X}$ er $\begin{pmatrix}1 & D_i & F_i & T_i & D_iF_i & D_iT_i & F_iT_i & D_iF_iT_i\end{pmatrix}$.

I figur 1 finn du R-kommandoar og utskrift for den tilpassa fulle modellen.

a) I uskrifta frå `summary(fit)` i figur 1 er *fire* talverdiar bytte ut med spørjeteikn. Rekn ut talverdiar for kvar av desse, og forklar kva kvart av tala tyder.

Eit såkalla kubeplott er gitt i det øvre venstre panelet i figur 2. I kubeplottet finn du tilpassa verdiar frå den multiple regresjonen for alle dei 8 mogelege kombinasjonane av dei tre faktorane. Plott av hovudeffektar (øvre høgre panel) og samspelseffektar (nedre panel) finn du i figur 2. I figur 3 finn du residualplott. Sjå figur 4 for tilhøyrande R-kode og utskrift.

b) Korleis vil du, frå figurane 2–4, vurdere modeltilpassinga?

Korleis vil du forklare til ein biolog kva den estimerte hovudeffekten av skade tyder i praksis? Korleis vil du forklare den estimerte samspelseffekten mellom skade og flagellin?

La $\gamma = 2^{\beta_F - \beta_D}$ vere ein ny parameter som vi er interesserte i.

Foreslå ein estimator, $\hat{\gamma}$, for γ. Bruk tilnærmingsmetodar til å finne forventa verdi og varians til denne estimatoren, det vil seie, $\mathrm{E}(\hat{\gamma})$ og $\mathrm{Var}(\hat{\gamma})$. Bruk resultata i figur 1 til å rekne ut talverdi for $\hat{\gamma}$, og estimerte talverdiar for $\mathrm{E}(\hat{\gamma})$ og $\mathrm{Var}(\hat{\gamma})$.

Hint: Du kan bruke at $2^x = \exp(x \ln 2)$, der ln er den naturlege logaritmen.

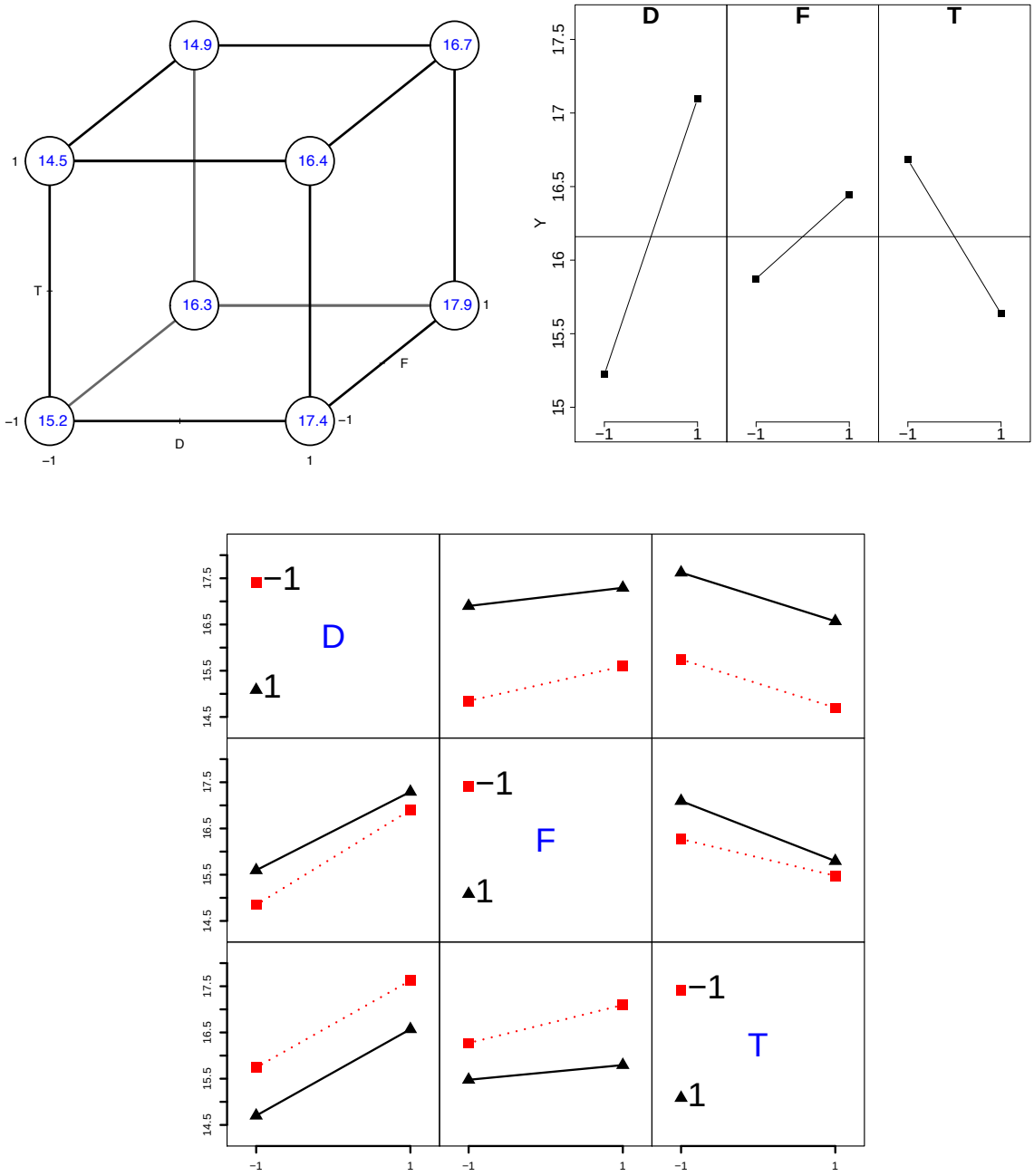
Forskarane vil teste hypotesen

$$H_0 \colon \beta_{D:T} = \beta_{F:T} = \beta_{D:F:T} = 0 \qquad \text{mot}$$
$$H_1 \colon \text{minst ein av } \beta_{D:T},\ \beta_{F:T},\ \beta_{D:F:T} \text{ er ulik 0.}$$

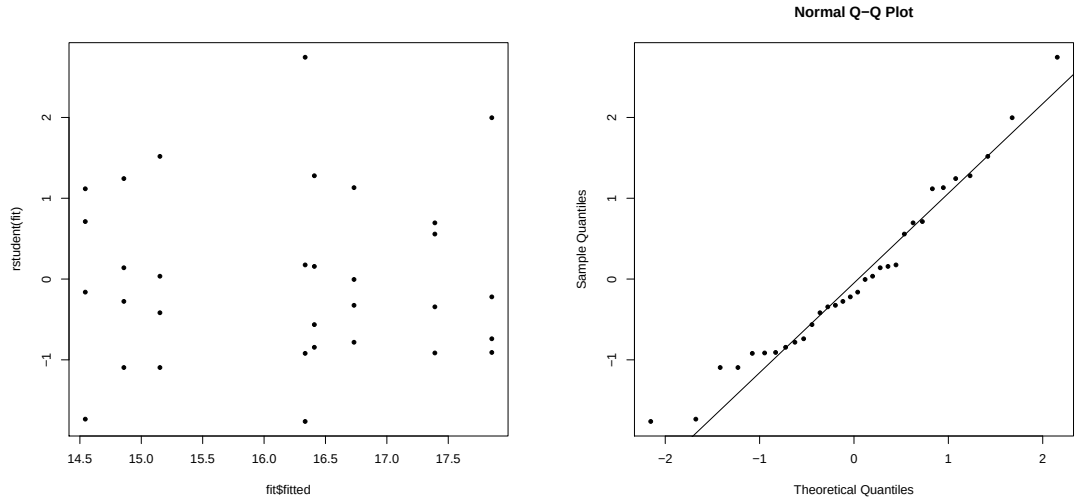
c) Vel signifikansnivå sjølv og utfør hypotesetesten. Alle talverdiane du treng for utrekningane finn du i figur 1.

```
# data is in "standard order" in data frame with name "ds"
> ds %showing only rows 1-6 and 27-32 for space considerations
          Y  D  F  T
1  15.45169 -1 -1 -1
2  15.15908 -1 -1 -1
3  14.93064 -1 -1 -1
4  15.06569 -1 -1 -1
5  14.51032 -1 -1  1
6  14.76922 -1 -1  1
...
27 18.23645  1  1 -1
28 17.70327  1  1 -1
29 16.66523  1  1  1
30 16.96046  1  1  1
31 16.73133  1  1  1
32 16.57248  1  1  1
> fit=lm(Y~D*F*T,data=ds)
> model.matrix(fit)%only showing rows 1-6 and 27-32
   (Intercept)  D  F  T D:F D:T F:T D:F:T
1            1 -1 -1 -1   1   1   1    -1
2            1 -1 -1 -1   1   1   1    -1
3            1 -1 -1 -1   1   1   1    -1
4            1 -1 -1 -1   1   1   1    -1
5            1 -1 -1  1   1  -1  -1     1
6            1 -1 -1  1   1  -1  -1     1
...
27           1  1  1 -1   1  -1  -1    -1
28           1  1  1 -1   1  -1  -1    -1
29           1  1  1  1   1   1   1     1
30           1  1  1  1   1   1   1     1
31           1  1  1  1   1   1   1     1
32           1  1  1  1   1   1   1     1
> summary(fit)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 16.15942    0.04140  ?       < 2e-16
D            0.93739    0.04140  22.644  < 2e-16
F            0.28546    0.04140   6.896 3.93e-07
T           -0.52354    0.04140 -12.647 4.18e-12
D:F         -0.08878    0.04140  -2.145  0.04231
D:T         -0.00242    ?        -0.058  0.95386
F:T         -0.12614    0.04140  -3.047  0.00555
D:F:T        0.09099    0.04140   2.198  ?
Residual standard error: 0.2342 on 24 degrees of freedom
Multiple R-squared:      ?, Adjusted R-squared:  0.9594
F-statistic: 105.6 on 7 and 24 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Figur 1: Utskrift av R-kommandoar og statistisk analyse av plantestress-datasettet. Fire talverdiar er bytte ut med spørjeteikn.



Figur 2: Kubeplott (øvre venstre panel), hovudeffektplott (øvre høgre panel) og samspelseffektplott (nedre panel) for den fulle regresjonsmodellen tilpassa til plantestress-datasettet.



Figur 3: Residualplot (studentiserte residual mot tilpassa verdiar til venstre, normalplott basert på studentiserte residual til høgre) for den fulle modellen for plantestress-datasettet.

```
> library(FrF2)
> MEPlot(fit)
> IAPlot(fit)
> cubePlot(fit,"D","F","T",round=1,size=0.33,main="")
> plot(fit$fitted,rstudent(fit),pch=20)
> qqnorm(rstudent(fit),pch=20)
> qqline(rstudent(fit))
> ad.test(rstudent(fit))
        Anderson-Darling normality test
data:  rstudent(fit)
A = 0.43191, p-value = 0.2869
```

Figur 4: Utskrift frå R-kommandoar og statistisk analyse for den fulle modellen for plantestress-datasettet.

Forskarane vil nytte dataa til prediksjon, og vil tilpasse ein redusert versjon av den fulle modellen. Først vart «best subset»-metoden nytta. Deretter tilpassa forskarane ein lasso-regresjon til dataa. Resultata finn du i figur 5 og 6.

d) Forklar kort hva som blir gjort i «best subset»-metoden, og vel ein god modell basert på R^2_{adj}-kriteriet. Skriv ned den tilpassa regresjonsmodellen du vel.

Forklar kort kva som blir gjort i lasso-regresjonen, og skriv ned den tilpassa regresjonsmodellen.

Samanlikn resultata frå «best subset»-regresjonen og lasso-regresjonen.

Forskarane vel å nytta denne *reduserte modellen* for prediksjon:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_D D_i + \beta_F F_i + \beta_T T_i + \beta_{D:F} D_i F_i + \varepsilon_i,$$

der $i = 1, \ldots, 32$, og vi antar at ε_i er uavhengige og identisk normalfordelt med forventningsverdi 0 og varians σ^2. Utskrift frå den tilpassa reduserte modellen finn du i figur 7.

e) Samanlikn dei estimerte regresjonsparametrane og dei estimerte standardavvika til dei estimerte regresjonsparameteane for den fulle modellen (figur 1) og den reduserte modellen (figur 7), og forklar kva du observerer.

Bruk den reduserte modellen (figur 7) til å lage ein prediksjon og eit 95% prediksjonsintervall for genaktivitetsnivået for faktorkombinasjonen $D = 1$, $F = 1$, $T = -1$.

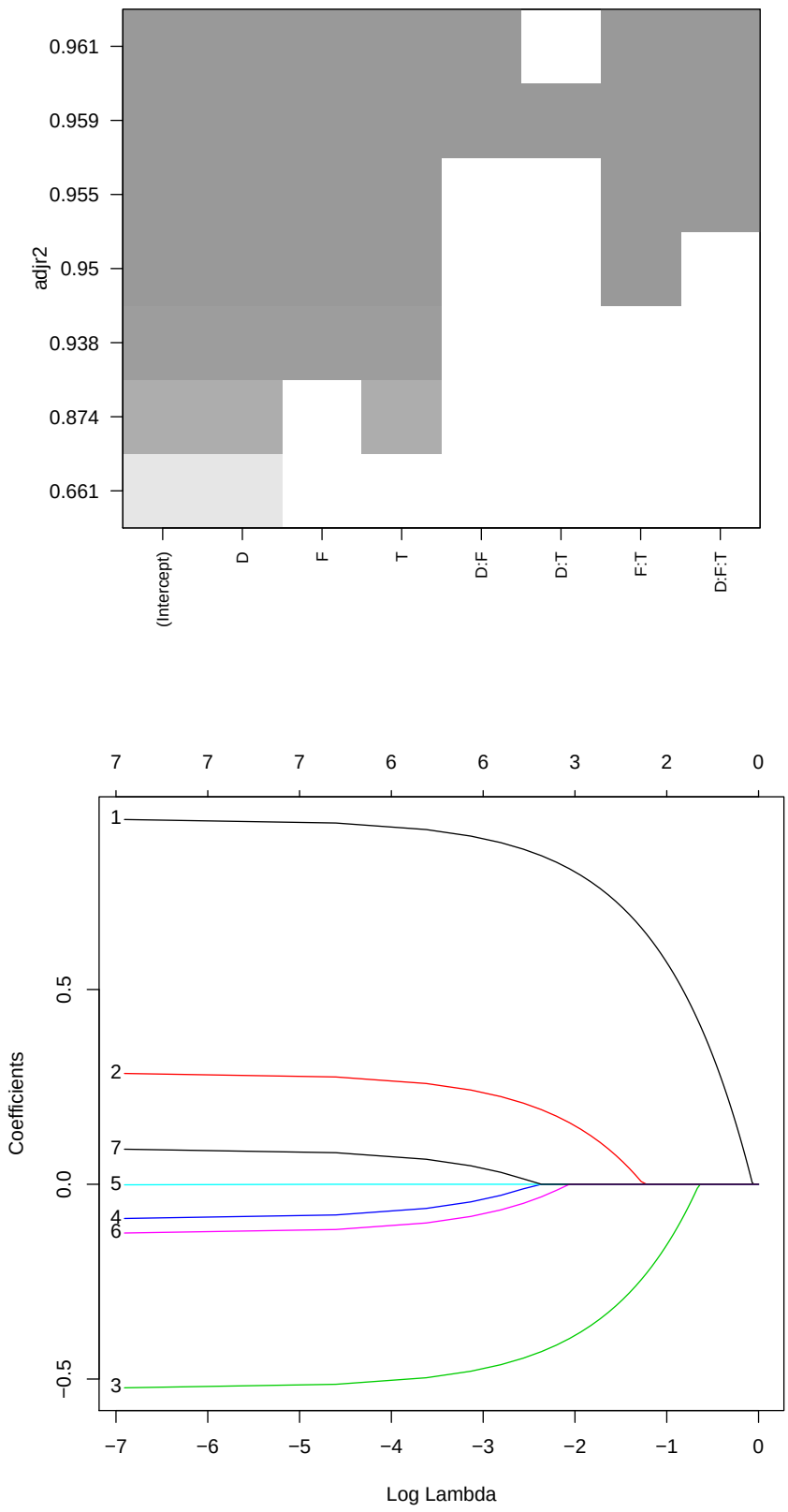
Hint: I ein multippel lineær regresjon med $n \times p$ designmatrise $\boldsymbol{X}$, estimerte regresjonsparametrar $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ og forventningsrett estimert feilvarians s^2, er et $(1-\alpha)100\%$ prediksjonsintervall i $\boldsymbol{x}_0$ gitt ved

$$\boldsymbol{x}_0^T \hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-p}\, s \sqrt{1 + \boldsymbol{x}_0^T (\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{x}_0},$$

der $t_{\alpha/2,n-p}$ er verdien i t-fordelinga med $n-p$ fridomsgradar som har areal $\frac{\alpha}{2}$ til høgre. Nokre mogelege verdiar for $t_{\alpha/2,n-p}$ er gitt i figur 7.

```
> x <- model.matrix(fit)[,-1]; dim(x)
[1] 32  7
> y <- ds$Y
> library(leaps)
> bests <- regsubsets(x,y)
> sumbests=summary(bests)
> sumbests
1 subsets of each size up to 7
Selection Algorithm: exhaustive
         D   F   T   D:F D:T F:T D:F:T
1  ( 1 ) "*" " " " " " " " " " " " " "
2  ( 1 ) "*" " " "*" " " " " " " " " "
3  ( 1 ) "*" "*" "*" " " " " " " " " "
4  ( 1 ) "*" "*" "*" " " " " "*" " " "
5  ( 1 ) "*" "*" "*" " " " " "*" "*"
6  ( 1 ) "*" "*" "*" "*" " " "*" "*"
7  ( 1 ) "*" "*" "*" "*" "*" "*" "*"
> plot(bests,scale="adjr2",col=gray(seq(0.6,0.9,length=20)))
> round(sumbests$adjr2,3)
[1] 0.661 0.874 0.938 0.950 0.955 0.961 0.959
# LASSO
> library(glmnet)
> fit.lasso=glmnet(x,y,lambda=c(seq(1,0.01,length=60),0.001))
> plot(fit.lasso,xvar="lambda",label=TRUE)
> cv.lasso=cv.glmnet(x,y)
> log(cv.lasso$lambda[which.min(cv.lasso$cvm)])
[1] -4.716347
> coef(cv.lasso,s="lambda.min")
8 x 1 sparse Matrix of class "dgCMatrix"
(Intercept) 16.15941869
D            0.92843876
F            0.27651524
T           -0.51459006
D:F         -0.07983558
D:T          .
F:T         -0.11719275
D:F:T        0.08204094
```

Figur 5: Utskrift frå R for «best subset»-modellval og lasso-regresjon for plantestress-datasettet.



Figur 6: Figur (øvre panel) frå «best subset»-modellseleksjonen og lasso-regresjon (nedre panel), med R-kode i figur 5. Kodar for linjene i lasso-figuren er 1=$\hat{\beta}_D$, 2=$\hat{\beta}_F$, 3=$\hat{\beta}_T$, 4=$\hat{\beta}_{D:F}$, 5=$\hat{\beta}_{D:T}$, 6= $\hat{\beta}_{F:T}$ og 7=$\hat{\beta}_{D:F:T}$.

```
> fitRED=lm(Y~D+F+T+D:F,data=ds)
> summary(fitRED)
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 16.15942    0.04919 328.528  < 2e-16
D            0.93739    0.04919  19.057  < 2e-16
F            0.28546    0.04919   5.804 3.56e-06
T           -0.52354    0.04919 -10.644 3.66e-11
D:F         -0.08878    0.04919  -1.805   0.0822
Residual standard error: 0.2782 on 27 degrees of freedom
Multiple R-squared:   0.95,        Adjusted R-squared:  0.9426
F-statistic: 128.4 on 4 and 27 DF,  p-value: < 2.2e-16
> qt(0.025,32,lower.tail=FALSE)
[1] 2.036933
> qt(0.025,27,lower.tail=FALSE)
[1] 2.051831
> qt(0.025,24,lower.tail=FALSE)
[1] 2.063899
```

Figur 7: Utskrift frå R for multippel lineær regresjon basert på den reduserte modellen for plantestress-datasettet.

Oppgåve 3 Eigenskapar til estimator for σ^2

La $\boldsymbol{Y}$ vere ein $n\times 1$ stokastisk vektor med forventningsverdi $\mu\mathbf{1}$ og kovariansmatrise $\sigma^2\boldsymbol{I}$, der $\mathbf{1}$ er ein $n\times 1$ vektor med alle element lik 1 og $\boldsymbol{I}$ er ei $n\times n$ identitetsmatrise. Vidare er Y_i element i frå $\boldsymbol{Y}$, og $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$.

Ein estimator for σ^2 er

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\Big)\boldsymbol{Y}.$$

Vi gir dette nyttige resultatet. La $\boldsymbol{X}$ vere ein $n\times 1$ stokastisk vektor med forventningsverdi $\boldsymbol{\eta}$ og kovariansmatrise $\boldsymbol{\Sigma}$, og la $\boldsymbol{C}$ vere ei $n\times n$ symmetrisk konstantmatrise. Då er

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\eta}. \tag{1}$$

a) Skriv først ned verdien til $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\mathbf{1}$, og til matrisene $\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ og $\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ for $n = 4$.
Kva er nøkkeleigenskapar til matrisa $\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ (symmetrisk eller ikkje, idempotent eller ikkje, rang)?
Bruk likning (1) til å finne $\mathrm{E}(S^2)$.

La oss anta at $\boldsymbol{Y}$ er multivariat normalfordelt med forventningsverdi og kovariansmatrise som gitt over.

b) Vis at $\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Y}$ er χ^2-fordelt, og finn antall frihetsgrader.
Bruk dette resultatet til å finne variansen til S^2.
Er den stokastiske variabelen $\frac{1}{n}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$ og den stokastiske vektoren $(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Y}$ uavhengige? Grunngje svaret ditt.
Finn til slutt fordelinga til

$$\frac{n(\frac{1}{n}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y} - \mu)^2}{\frac{1}{n-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{Y}}.$$

Grunngje svaret ditt.