Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag - Eksamen august 2003

Oppgave 1

a)

Modell (1) på standard ARMA(p,q)-form:

$$x_t - \phi x_{t-1} = \omega_t + \theta\omega_{t-1} + \theta\omega_{t-2},$$

dvs.

$$\underline{\underline{\phi(B) = 1 - \phi B}} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{\theta(B) = 1 + \theta B + \theta B^2}}.$$

En stokastisk prosess er svakt stasjonær dersom

$$\mathrm{E}[x_t] = \mu \text{ ikke avhenger av } t$$

og

$$\mathrm{Cov}[x_t, x_{t-h}] = \gamma(h) \text{ kun er en funksjon av } h, \text{ ikke av } t.$$

b)

En ARMA-modell er kausal dersom den kan skrives på formen

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j}.$$

Vi har

$$\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{\phi},$$

slik at

$$z \text{ utenfor enhetssirkelen} \Leftrightarrow |\phi| < 1.$$

Dvs. $\underline{\underline{\{x_t\} \text{ er kausal hvis } |\phi| < 1, \text{ ingen betingelser på } \theta.}}$

En ARMA-modell er invertibel dersom den kan skrives på formen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j x_{t-j} = \omega_t.$$

Vi har

$$\theta(z) = 1 + \theta z + \theta z^2 = 0 \Rightarrow z = z_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}} \;\text{ eller }\; z = z_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\theta}}.$$

Dersom $\theta \geq 4$ blir z_1 og z_2 reelle og

$$|z_1| \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \text{og} \quad |z_2| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = 1.$$

Dersom $\theta < 4$ blir røttene komplekse

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}} \quad \text{og} \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}},$$

som gir

$$|z_i|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\theta}.$$

og

$$z_i \text{ utenfor enhetssirkelen} \Leftrightarrow |\theta| < 1.$$

Dvs. $\underline{\underline{\{x_t\} \text{ er invertibel hvis } |\theta| < 1, \text{ ingen betingelser på } \phi.}}$

c)

$$\phi(B)x_t = \theta(B)\omega_t \Leftrightarrow x_t = \phi^{-1}(B)\theta(B)\omega_t = \psi(B)\omega_t$$

Generelt har vi altså

$$\psi(z) = \phi^{-1}(z)\theta(z) \Leftrightarrow \phi(z)\psi(z) = \theta(z),$$

som i vår situasjon gir

$$(1 - \phi z)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^2 + \ldots) = 1 + \theta z + \theta z^2$$

$$\psi_0 - \phi\psi_0 z + \psi_1 z - \phi\psi_1 z^2 + \psi_2 z^2 - \phi\psi_2 z^3 + \psi_3 z^3 - \phi\psi_3 z^4 + \ldots = 1 + \theta z + \theta z^2.$$

Dvs.

$$\psi_0 = 1$$

$$-\phi\psi_0 + \psi_1 = \theta \Rightarrow \psi_1 = \theta + \phi\psi_0 = \theta + \phi$$

$$-\phi\psi_1 + \psi_2 = \theta \Rightarrow \psi_2 = \theta + \phi\psi_1 = \theta + \phi(\theta + \phi) = \theta(1 + \phi) + \phi^2$$

$$-\phi\psi_2 + \psi_3 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi\psi_2 = \phi\theta(1+\phi) + \phi^3$$
$$\vdots$$
$$-\phi\psi_{j-1} + \psi_j = 0 \Rightarrow \psi_j = \phi\psi_{j-1} = \phi^2\psi_{j-2} = \ldots = \phi^{j-2}\theta(1+\phi) + \phi^j$$
$$= \phi^j\left(1 + \frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right) \quad \text{for } j \geq 3$$

Har dermed vist at

$$\underline{\underline{\psi_0 = 1 \ \ , \ \ \psi_1 = \theta + \phi \ \ \text{og} \ \ \psi_j = \phi^j\left(1 + \frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right) \quad \text{for } j \geq 2.}}$$

d)

Vi har at

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j},$$

der ψ_j'ene er kjent fra **c**). For $h \geq 0$ får man dermed

$$\gamma(h) = \mathrm{E}[x_t x_{t+h}] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \omega_{t+h-k}\right)\right]$$
$$= \mathrm{E}\left[\sum_{j=h}^{\infty} \psi_j \psi_{j-h} \omega_{t+h-j}^2\right] = \sigma_\omega^2 \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j \psi_{j-h},$$

ved å benytte at forskjellige ω_t'er er uavhengige. Spesielt for $h = 0$ får man

$$\gamma(0) = \sigma_\omega^2\left(1 + (\theta+\phi)^2 + \left(1 + \frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right)^2 \sum_{j=2}^{\infty} \phi^{2j}\right)$$
$$= \underline{\underline{\sigma_\omega^2\left(1 + (\theta+\phi)^2 + \left(1 + \frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right)^2 \frac{\phi^4}{1-\phi^2}\right)}}$$

For $h = 1$ får man

$$\gamma(1) = \sigma_\omega^2\left(\psi_1\psi_0 + \psi_2\psi_1 + \sum_{j=3}^{\infty} \psi_j \psi_{j-1}\right)$$
$$= \sigma_\omega^2\left((\theta+\phi)\left(1 + \phi^2 + \theta(1+\phi)\right) + \left(1 + \frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right)^2 \sum_{j=3}^{\infty} \phi^{2j-1}\right)$$

$$= \sigma_\omega^2 \left((\theta+\phi)\left(1+\phi^2+\theta(1+\phi)\right) + \left(1+\frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right)^2 \frac{\phi^5}{1-\phi^2} \right)$$

som gir ett-stegs korrelasjon

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \underline{\underline{\frac{(\theta+\phi)\left(1+\phi^2+\theta(1+\phi)\right) + \left(1+\frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right)^2 \frac{\phi^5}{1-\phi^2}}{1+(\theta+\phi)^2 + \left(1+\frac{\theta(1+\phi)}{\phi^2}\right)^2 \frac{\phi^4}{1-\phi^2}}}}.$$

For $\phi = -0.7$ og $\theta = 0.8$ får man $\gamma(0) = 2.05$ og $\rho(1) = -0.27$, mens man for $\phi = 0.9$ og $\theta = -0.1$ får $\gamma(0) = 3.66$ og $\rho(1) = 0.85$. I figur 1 ser vi at realisasjonen i (b) åpenbart har mye høyere ett-stegs korrelasjon enn realisasjonen (a). Realisasjonen i (a) må derfor høre til $\phi = -0.7$ og $\theta = 0.8$, mens realisasjonen i (b) hører til $\phi = 0.9$ og $\theta = -0.1$.

Oppgave 2

a)

I tidsrekka i (a) er åpenbart variansen avhengig av nivået, den har størst variabilititet når verdien er stor. Det er derfor ikke rimelig å tilpasse en ARMA(p,q)-modell. Det er naturlig å prøve med en variansstabiliserende transformasjon. Dette kan være å ta logaritmen eller en Box-Cox-transformasjon.

Tidsrekka i (b) har en klar trend. Forventningen ser ut til å øke lineært med tiden. Det er derfor ikke naturlig å modellere denne som en ARMA(p,q)-modell. Det er rimelig å differensiere tidsrekka for å fjerne trenden.

Tidsrekka i (c) har ingen klare trender. Variabiliteten synes heller ikke å avhengig av nivået. Det er rimelig å tilpasse en ARMA(p,q)-modell til denne.

b)

Partiell autokorrelasjonsfunksjon er definert som

$$\phi_{hh} = \mathrm{Corr}[x_h - x_h^{h-1}, x_0 - x_0^{h-1}],$$

der x_h^{h-1} og x_0^{h-1} er beste lineære prediktor for henholdsvis x_h og x_0 basert på $x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}$.

En AR(1)-modell er gitt ved

$$x_t = \phi x_{t-1} + \omega_t,$$

der $\{\omega_t\}$ er hvit støy med $\mathrm{Var}[\omega_t] = \sigma_\omega^2$.

For $h = 1$ blir $h - 1 = 0$ slik at $x_h^{h-1} = x_0^{h-1} = 0$. Dermed

$$\phi_{11} = \text{Corr}[x_1, x_0] = \text{Corr}[\phi x_0 + \omega_1, x_0] = \phi \text{Corr}[x_1, x_1] + \text{Corr}[\omega_1, x_0] = \phi$$

siden $\text{Corr}[\omega_1, x_0] = 0$ når modellen er kausal.

For $h = 2$ blir $h - 1 = 1$ og man må starte med å bestemme x_2^1 og x_0^1. For den første har vi at

$$x_2^1 = \alpha + \beta x_1,$$

der α og β skal velges slik at $\text{E}[(x_2^1 - x_2)^2]$ minimeres. I en AR(1)-modell får man

$$\begin{aligned}\text{E}[(x_2^1 - x_2)^2] &= \text{E}[((\alpha + \beta x_1) - (\phi x_1 + \omega_2))^2] = \text{E}[(\alpha + (\beta - \phi)x_1 + \omega_2)^2] \\ &= \alpha^2 + (\beta - \phi)^2 \text{E}[(x_1)^2] + \sigma_\omega^2,\end{aligned}$$

der vi for siste overgang har benyttet at x_1 og ω_2 er uavhengige siden modellen er kausal, og at $\text{E}[x_1] = \text{E}[\omega_2] = 0$. Ser dermed at $\text{E}[(x_2^1 - x_2)^2]$ minimeres ved å velge $\alpha = 0$ og $\beta = \phi$. Dvs. $x_2^1 = \phi x_1$.

Med helt tilsvarende regning får man at $x_0^1 = \phi x_1$. Dermed

$$\phi_{22} = \text{Corr}[x_2 - \phi x_1, x_0 - \phi x_1] = \text{Corr}[\omega_2, x_0 - \phi x_1] = 0,$$

siden ω_2 er uavhengig av x_0 og x_1 når modellen er kausal.

c)

Autokorrelasjonsfunksjonen synes å avta eksponensielt mot null. Partiell autokorrelasjonsfunksjon er signifikant forskjellig fra null kun for lag 1 og 2. (For lag 2 er den ikke sterkt signifikant). Begge disse stemmer overens med oppførselen for en AR(2)-modell. [Eventuelt kan man vurdere en AR(1)-modell siden partiell autokorrelasjonsfunksjon på lag 2 er såpass lite signifikant.]

Likelihoodfunksjonen for en AR(1)-modell er gitt som

$$\begin{aligned}L(\phi, \sigma_\omega^2) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{300}; \phi, \sigma_\omega^2) &= f(x_1; \phi, \sigma_\omega^2) \cdot \prod_{i=2}^{300} f(x_i | x_1, \ldots, x_{i-1}; \phi, \sigma_\omega^2) \\ &= f(x_1; \phi, \sigma_\omega^2) \cdot \prod_{i=2}^{300} f(x_i | x_{i-1}; \phi, \sigma_\omega^2),\end{aligned}$$

der den siste overganger følger av AR(1)-modellens markovegenskap. For en AR(1)-modell har vi videre at

$$f(x_i|x_{i-1};\phi,\sigma_\omega^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\omega^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\omega^2}(x_i-\phi x_{i-1})^2\right\}.$$

Også x_1 er normalfordelt med forventning 0, men variansen må bestemmes. Denne kan f.eks. bestemmes ved

$$\text{Var}[x_t] = \text{Var}[\phi x_{t-1}+\omega_t] = \phi^2\text{Var}[x_{t-1}]+\sigma_\omega^2.$$

Siden tidsrekka er stasjonær må $\text{Var}[x_{t-1}] = \text{Var}[x_t]$ slik at

$$\text{Var}[x_t] = \frac{\sigma_\omega^2}{1-\phi^2}.$$

Dermed blir

$$f(x_1;\phi,\sigma_\omega^2) = \sqrt{\frac{1-\phi^2}{2\pi\sigma_\omega^2}}\exp\left\{-\frac{1-\phi^2}{\sigma_\omega^2}x_1^2\right\}.$$

Dermed får vi at likelihoodfunksjonen blir

$$\underline{\underline{L(\phi,\sigma_\omega^2) = \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{(2\pi\sigma_\omega^2)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\omega^2}\left[(1-\phi^2)x_1^2+\sum_{i=2}^{300}(x_i-\phi x_{i-1})^2\right]\right\}.}}$$

d)

ARMA(2,0)-modellen har best (lavest) AIC-verdi. P-verdiene er også høyest for ARMA(2,0)-modellen. For acf og pacf for residualene er det relativt liten forskjell på de to modellene, men både acf og pacf på lag 1 er signifikant forskjellig fra null for ARMA(1,0)-modellen og ikke for ARMA(2,0)-modellen. Alt dette indikerer altså at vi skal foretrekke ARMA(2,0)-modellen fremfor ARMA(1,0)-modellen.

Oppgave 3

a)

Benytter tilstandsligningen for å få (for $h \geq 1$)

$$x_{n+h}^n = \text{E}[x_{n+h}|y_1,y_2,\ldots,y_n] = \text{E}[\phi x_{n+h-1}+\omega_{n+h}|y_1,y_2,\ldots,y_n]$$

$$= \phi\text{E}[x_{n+h-1}|y_1,y_2,\ldots,y_n]+\text{E}[\omega_{n+h}|y_1,y_2,\ldots,y_n] = \phi x_{t+h-1}^n$$

siden $\mathrm{E}[\omega_{n+h}|y_1, y_2, \ldots, y_n] = \mathrm{E}[\omega_{n+h}] = 0$ da ω_{n+h} er uavhengig av de (tidligere) observasjonene $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Rekursjonsligningen for prediksjonene blir dermed

$$\underline{\underline{x^n_{n+h} = \phi x^n_{n+h-1} \quad \text{for } h = 1, 2, \ldots}}$$

For prediksjonsvariansen får man tilsvarende

$$\begin{aligned} P^n_{n+h} &= \mathrm{Var}[x^n_{n+h}|y_1, y_2, \ldots, y_n] = \mathrm{Var}[\phi x^n_{n+h-1} + \omega_{n+h}|y_1, y_2, \ldots, y_n] \\ &= \phi^2 \mathrm{Var}[x^n_{n+h-1}|y_1, y_2, \ldots, y_n] + \mathrm{Var}[\omega_{n+h}|y_1, y_2, \ldots, y_n] \\ &= \phi^2 P^n_{n+h-1} + \mathrm{Var}[\omega_{n+h}] = \phi^2 P^n_{n+h-1} + \sigma^2. \end{aligned}$$

Her benyttet vi først at ω_{n+h} er uavhengig av x_{n+h-1} og deretter nok en gang at ω_{n+h} er uavhengig av de (tidligere) observasjonene $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Rekursjonsligningen er dermed

$$\underline{\underline{P^n_{n+h} = \phi^2 P^n_{n+h-1} + \sigma^2 \quad \text{for } h = 1, 2, \ldots}}$$

b)

Vi har at

$$y_t = \phi x_{t-1} + \omega_t + v_t = \phi(x_{t-1} + v_{t-1}) - \phi v_{t-1} + \omega_t + v_t = \phi y_{t-1} + \omega_t + v_t - \phi v_{t-1}.$$

Dette blir ekvivalent med

$$y_t = \phi y_{t-1} + a_t + \theta a_{t-1},$$

der $\{a_t\}$ er en Gaussisk hvit støy prosess med $\mathrm{Var}[a_t] = \tau^2$, dersom vi velger τ^2 og θ slik at

$$\mathrm{Var}[\omega_t + v_t - \phi v_{t-1}] = \mathrm{Var}[a_t + \theta a_{t-1}]$$

og

$$\mathrm{Cov}[\omega_t + v_t - \phi v_{t-1}, \omega_{t-1} + v_{t-1} - \phi v_{t-2}] = \mathrm{Cov}[a_t + \theta a_{t-1}, a_{t-1} + \theta a_{t-2}].$$

De to ligningene blir

$$\sigma^2 + 1 + \phi^2 = \tau^2(1 + \theta^2) \quad \text{og} \quad -\phi = \theta \tau^2.$$

Deler vi disse på hverandre får vi en andregradsligning for θ,

$$-\frac{\sigma^2 + 1 + \phi^2}{\phi} = \frac{1 + \theta^2}{\theta} \Leftrightarrow \theta^2 + \frac{\sigma^2 + 1 + \phi^2}{\phi} + 1 = 0.$$

Dette gir

$$\theta = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sigma^2 + 1 + \phi^2}{\phi} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma^2 + 1 + \phi^2}{\phi}\right)^2 - 4}\right]$$

og
$$\tau^2 = -\frac{\phi}{\theta}.$$
Dvs. vi har en ARMA(1,1)-modell med $\phi_1 = \phi$, $\theta_1 = \theta$ og med støyvarians τ^2.

[Man kan forøvrig merke seg at $\sigma^2 + 1 + \phi^2 \geq 2\phi$ slik at θ vil være reell. Dessuten må man velge løsningen som har $|\theta| < 1$ dersom man ønsker en invertibel modell.]