Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Arvid Næss 73 59 70 53/ 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

9. august 2004
Tid: 09:00–14:00

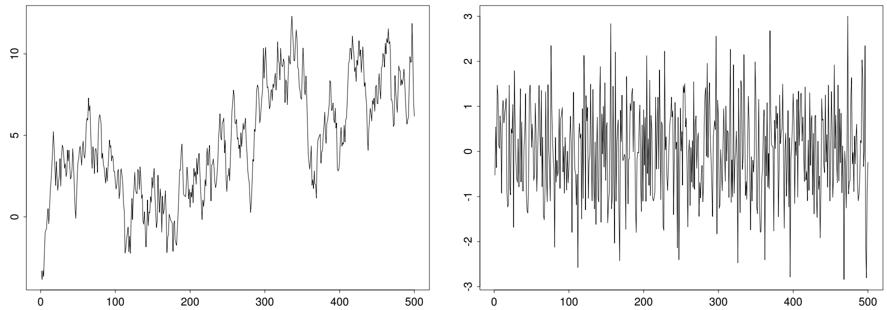
Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Ett gult A5-ark med stempel med egne formler og notater

Sensuren faller: 23. august 2004

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i dette oppgavesettet:

- w_t er hvit støy med varians σ_w^2.
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^k x_t \equiv x_{t-k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- x_t^s er prognosen for x_t gitt $x_1, \ldots, x_s$.



(a) x_t (b) y_t

Figur 1: (a) data fra modellen definert i (1), dvs. x_t, og (b) den deriverte y_t.

Oppgave 1

La x_t være gitt ved

$$(1 - \phi B)x_t = bt + w_t \tag{1}$$

der b er en konstant.

a) Hva menes med at en stokastisk prosess er svakt stasjonær?
For hvilke verdier av b og ϕ er x_t en svakt stasjonær prosess?

Anta videre at $|\phi| < 1$ og $b \neq 0$.

Data fra prosessen i (1) er vist i figur 1a.

b) Hvorfor analyserer vi ofte differensierte data (figur 1b)

$$y_t = (1 - B)x_t$$

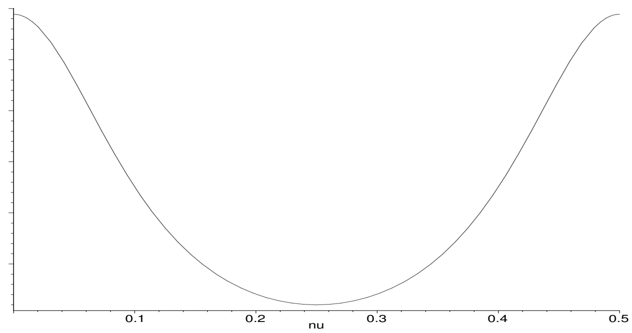
når dataene er som i figur 1a?

c) Hvilken ARMA-modell følger y_t?
Er y_t invertibel? Kommentér.

Oppgave 2

La x_t være gitt ved

$$x_t = \phi_x x_{t-1} + w_{x,t}, \qquad |\phi_x| < 1, \quad \mathrm{Var}(w_{x,t}) = \sigma_{w,x}^2$$



Figur 2: Ett mulig frekvensspekter til z_t.

og y_t være gitt ved

$$y_t = \phi_y y_{t-1} + w_{y,t}, \qquad |\phi_y| < 1, \quad \mathrm{Var}(w_{y,t}) = \sigma^2_{w,y}$$

der indeksene "x" og "y" indikerer tilhørighet til x- og y-prosessen.

Anta $\{x_t\}$ er ukorrelert med $\{y_t\}$ og at vi observerer *kun* z_t, der

$$z_t = x_t + y_t$$

a) Finn autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til z_t.

La $f_x(\nu)$ være frekvensspekteret til x_t, og tilsvarende med $f_y(\nu)$ og $f_z(\nu)$.

b) Vis at

$$f_z(\nu) = f_x(\nu) + f_y(\nu). \tag{2}$$

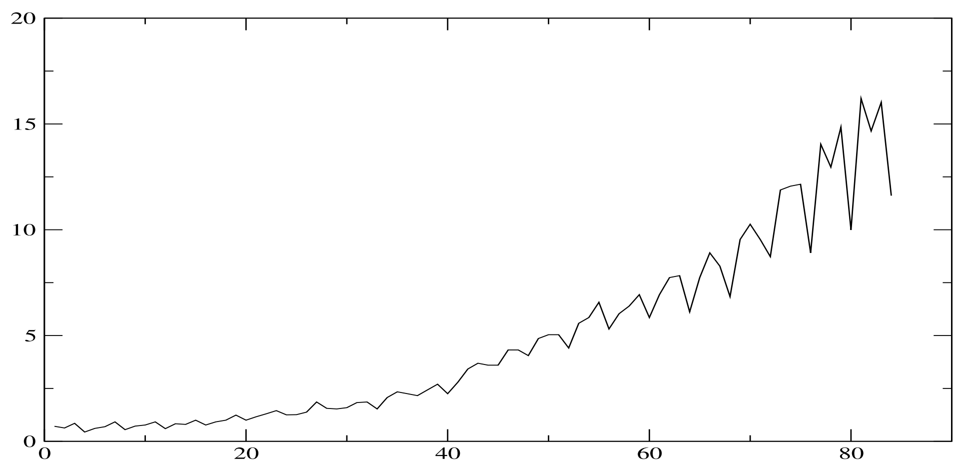
Bruk (2) til å finne $f_z(\nu)$.

c) Dersom $f_z(\nu)$ hadde vært som i figur 2, hva vet vi da om fortegnene til ϕ_x og ϕ_y?

Anta videre at $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$, samt at $\phi_x = \phi_y = \phi$.

d) Vis at z_t er en ARMA-prosess. Bestem orden og alle parametre i modellen.

e) Finn ett- og to-stegs prognose samt tilhørende prognosefeil for z_t.



Figur 3: Kvartalsvise overskudd for Johnson & Johnson.

Oppgave 3

I figur 3 er det vist kvartalsvise data for overskudd for firmaet Johnson & Johnson.

Du blir forelagt følgende modell: De observerte data, y_t, modelleres ved

$$y_t = \mu_t + s_t + v_t$$

der μ_t er trend, s_t er sesongkomponent og v_t er hvit støy. Trenden μ_t modelleres ved

$$\mu_t = \beta\mu_{t-1} + w_t$$

der w_t er hvit støy og β en parameter. Sesongkomponenten s_t modelleres ved

$$s_t + s_{t-1} + s_{t-2} + s_{t-3} = u_t$$

der u_t er hvit støy.

a) Skriv modellen på "state-space" form, dvs med en tilstands-ligning og en observasjonsligning.

Forklar kort hvordan du vil tilpasse modellen til de observerte data samt beregne prognoser for det kvartalsvise overskuddet.

b) Diskutér hvordan sesongvariasjon er tatt hensyn til i denne modellen. Burde det vært gjort på en annen måte? I så fall, hvordan?