



Faglig kontakt under eksamen:  
Håvard Rue 73 59 35 20

EKSAMEN I FAG SIF5079 Tidsrekker og filterteori  
Lørdag 8. desember 2001  
Tid: 09:00–14:00

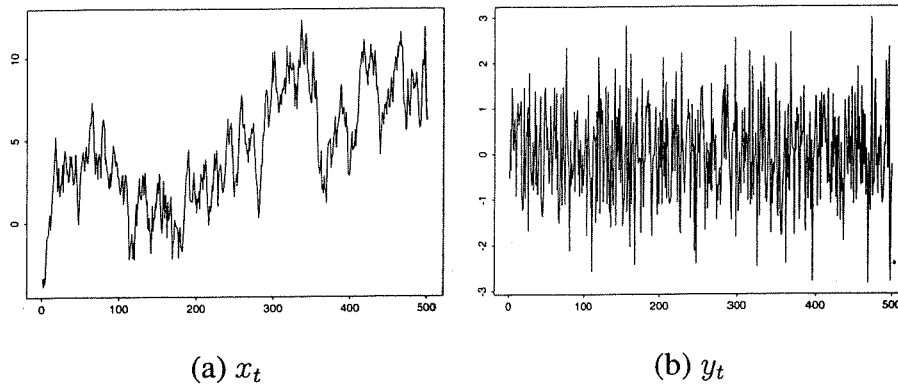
Tilatte hjelpemidler:  
Godkjent kalkulator.  
Statistiske tabeller og formler, TAPIR.  
Et gult ark med egne formler.

Sensurfrist: 7. januar 2002.

**NB: Alle svar skal begrunnes.**

**Notasjon brukt i denne oppgaven:**

- $w_t$  er hvit støy med varians  $\sigma_w^2$ .
- $B$  er *backshift*-operatoren, slik at  $B^k x_t \equiv x_{t-k}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- $x_t^s$  er prognosen for  $x_t$  gitt  $x_1, \dots, x_s$ .



Figur 1: (a) data fra modellen definert i (1), og (b) den deriverte.

### Oppgave 1

La  $x_t$  være gitt ved

$$(1 - \phi B)x_t = bt + w_t \quad (1)$$

der  $b$  er en konstant.

a) Hva menes med at en stokastisk prosess er svakt stasjonær?

For hvilke verdier av  $b$  og  $\phi$  er  $x_t$  en svakt stasjonær prosess?

Anta videre at  $|\phi| < 1$  og  $b \neq 0$ .

Data fra prosessen i (1) er vist i figur 1a.

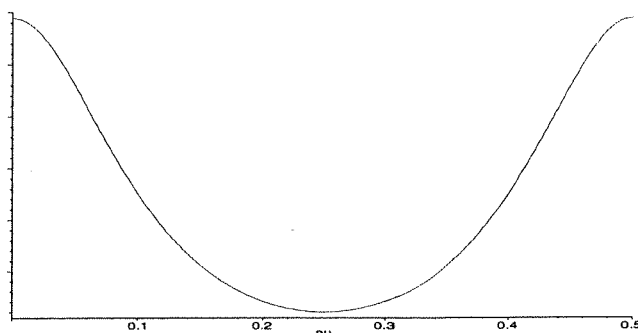
b) Hvorfor analysere vi ofte differensierte data (figur 1b)

$$y_t = (1 - B)x_t$$

når dataene er som i figur 1a?

c) Hvilken ARMA-modell følger  $y_t$ ?

Er  $y_t$  invertibel? Kommenter.

Figur 2: Ett mulig frekvensspekter til  $z_t$ .**Oppgave 2**

La  $x_t$  være gitt ved

$$x_t = \phi_x x_{t-1} + w_{x,t}, \quad |\phi_x| < 1, \quad \text{Var}(w_{x,t}) = \sigma_{w,x}^2$$

og  $y_t$  være gitt ved

$$y_t = \phi_y y_{t-1} + w_{y,t}, \quad |\phi_y| < 1, \quad \text{Var}(w_{y,t}) = \sigma_{w,y}^2$$

der indeksene "x" og "y" indikerer tilhørighet til x- og y-prosessen.

Anta  $\{x_t\}$  er ukorrelert med  $\{y_t\}$  og at vi observerer *kun*  $z_t$ , der

$$z_t = x_t + y_t$$

a) Finn autokorrelasjonsfunksjonen (ACF) til  $z_t$ .

La  $f_x(\nu)$  være frekvensspekteret til  $x_t$ , og tilsvarende med  $f_y(\nu)$  og  $f_z(\nu)$ .

b) Vis at

$$f_z(\nu) = f_x(\nu) + f_y(\nu). \quad (2)$$

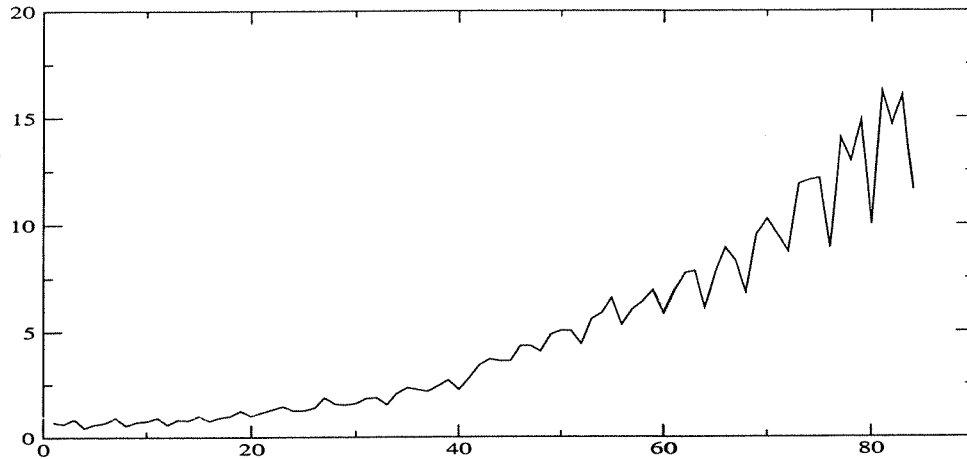
Bruk (2) til å finne  $f_z(\nu)$ .

c) Dersom  $f_z(\nu)$  hadde vært som i figur 2, hva vet vi da om fortegnene til  $\phi_x$  og  $\phi_y$ ?

Anta videre at  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$ , samt at  $\phi_x = \phi_y = \phi$ .

d) Vis at  $z_t$  er en ARMA-prosess. Bestem orden og alle parametre i modellen.

e) Finn ett- og to-steps prognose samt tilhørende prognosefeil for  $z_t$ .



Figur 3: Kvartalsvise overskudd for Johnson & Johnson.

### Oppgave 3

I figur 3 er det vist kvartalvise data for overskudd for firmaet Johnson & Johnson.

Du blir forelagt følgende modell: De observerte data,  $y_t$ , modelleres ved

$$y_t = \mu_t + s_t + v_t$$

der  $\mu_t$  er trend,  $s_t$  er sesongkomponent og  $v_t$  er hvit støy. Trenden  $\mu_t$  modelleres ved

$$\mu_t = \beta\mu_{t-1} + w_t$$

der  $w_t$  er hvit støy og  $\beta$  en parameter. Sesongkomponenten  $s_t$  modelleres ved

$$s_t + s_{t-1} + s_{t-2} + s_{t-3} = u_t$$

der  $u_t$  er hvit støy.

- Skriv modellen på "state-space" form, dvs med en tilstands-ligning og en observasjonsligning. Forklar kort hvordan du vil tilpasse modellen til de observerte data samt beregne prognoser for det kvartalvise overskuddet.
- Diskuter hvordan sesongvariasjon er tatt hensyn til i denne modellen. Burde det vært gjort på en annen måte? I så fall, hvordan?