Løsningsskisse SIF5079, Desember 2001

Oppgave 1

a) svakt stasjonær: $E[x_t] = \mu$

$$\mathrm{Cov}[x_t, x_s] = \gamma(s-t)$$

Har modellen:

$$(1-\phi B)x_t = bt + \omega_t$$

$$x_t = \phi x_{t-1} + bt + \omega_t$$

Krever:

$$E[x_t] = \mu \Rightarrow \mu = \phi\mu + bt + 0 \quad \text{for alle } t$$

dvs. må ha $\underline{\underline{b=0}}$ (som gir $\mu = 0$)

Får da

$$x_t = \phi x_{t-1} + \omega_t \qquad (*)$$

som er en AR(1)-modell

Vi vet at denne er svakt stasjonær dersom $|\phi| < 1$.

[Eventuelt kan selvfølgelig utlede dette siste kravet, slik vi har gjort i pensum.]

b) Figur 1 (a) tyder på at den observerte tidsrekken er ikke-stasjonær. Vi differensierer da den observerte tidsrekken og analyserer denne i stedet derson denne synes å være stasjonær.

c)

$$y_t = x_t - x_{t-1} \qquad (x_t = \phi x_{t-1} + bt + \omega_t)$$

$$= \phi x_{t-1} + bt + \omega_t$$
$$- \phi x_{t-2} - b(t-1) - \omega_{t-2}$$

$$\underline{y_t} = \phi y_{t-1} + b + \omega_t - \omega_{t-1}$$

$E[y_t]$: $\quad \mu = \phi\mu + b \Rightarrow \mu = \frac{b}{1-\phi}$

ↄ: y_t følger en ARMA(1,1) - modell med $\mu = \frac{b}{1-\phi}$ med $\phi_1 = \phi$ og $\theta_1 = -1$

Krav for invertibilitet: røttene til $\theta(z) = 0$ skal ligge utenfor enhetssirkelen.

Her: $\quad \theta(z) = 1 - \theta_1 z = 1 + z = 0 \Rightarrow z = -1$

dvs. modellen er <u>ikke</u> invertibel

Oppgave 2

x_t er AR(1) og har $\gamma_x(h) = \dfrac{\sigma_{w,x}^2}{1-\phi_x^2} \phi_x^{|h|}$

y_t er AR(1) og har $\gamma_y(h) = \dfrac{\sigma_{w,y}^2}{1-\phi_y^2} \phi_y^{|h|}$

For $z_t = x_t + y_t$:

$$\gamma_z(h) = \mathrm{Cov}[x_{t+h} + y_{t+h}, x_t + y_t]$$

$$= \mathrm{Cov}[x_{t+h}, x_t] + \mathrm{Cov}[y_{t+h}, y_t]$$

fordi x-prosessen er ukorrelert med y-prosessen

$$= \gamma_x(h) + \gamma_y(h)$$

$$= \frac{\sigma_{w,x}^2}{1-\phi_x^2} \phi_x^{|h|} + \frac{\sigma_{w,y}^2}{1-\phi_y^2} \phi_y^{|h|}$$

$$\rho_z(h) = \frac{\gamma_z(h)}{\gamma_z(0)} = \ldots$$

c)
$$f(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h)\, e^{-2\pi i \nu h}$$

Dvs.

$$f_z(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_z(h)\, e^{-2\pi i \nu h} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left(\gamma_x(h) + \gamma_y(h)\right) e^{-2\pi i \nu h}$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_x(h) e^{-2\pi i \nu h} + \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_y(h)\, e^{-2\pi i \nu h}$$

$$= \underline{\underline{f_x(h) + f_y(h)}}$$

$$f_x(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\omega x}^2}{1-\phi_x^2}\, \phi_x^{|h|}\, e^{-2\pi i \nu h}$$

$$= \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1-\phi_x^2}\left[1 + \sum_{h=1}^{\infty} \phi_x^h \Big(\cos(2\pi\nu h) - i\sin(2\pi\nu h) + \cos(2\pi\nu h) + i\sin(2\pi\nu h)\Big)\right]$$

$$= \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1-\phi_x^2}\left[1 + 2\sum_{h=0}^{\infty} \phi_x^h \cos(2\pi\nu h) - 2\right]$$

Summeformel fra Rotman: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos x}{1 + r^2 - 2r\cos x}$

for $r^2 < 1$

Vi har $r = \phi_x$, $x = 2\pi\nu$, $n = h$

$$\Rightarrow \quad f_x(\nu) = \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1-\phi_x^2}\left[-1 + \frac{2(1-\phi_x\cos(2\pi\nu))}{1+\phi_x^2-2\phi_x\cos(2\pi\nu)}\right]$$

$$= \ldots = \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1+\phi_x^2-2\phi_x\cos(2\pi\nu)}$$

<u>Derned:</u>

$$\underline{\underline{f_z(\nu) = \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{1+\phi_x^2-2\phi_x\cos(2\pi\nu)}}} + \frac{\sigma_{\omega,y}^2}{1+\phi_y^2-2\phi_y\cos(2\pi\nu)}$$

c) $$f_x'(\nu) = \frac{\sigma_{\omega,x}^2}{(1+\phi_x^2-2\phi_x\cos(2\pi\nu))^2}\cdot(+2\phi_x\sin(2\pi\nu)\cdot 2\pi)$$

Dvs. i intervallet $\nu \in [0, \frac{1}{2}]$ er $f_x(\nu)$ voksende dersom ϕ_x er positiv og avtagende dersom ϕ_x er negativ

I figur er $f_z(\nu)$ avtagende i et område og voksende i en annet. Derned må ϕ_x og ϕ_y ha <u>motsatt fortegn</u>.

d)

$$(1-\phi B)\, x_t = \omega_{x,t} \quad \Rightarrow \quad x_t = (1-\phi B)^{-1}\omega_{x,t}$$

$$(1-\phi B)\, y_t = \omega_{y,t} \quad \Rightarrow \quad y_t = (1-\phi B)^{-1}\omega_{y,t}$$

$$z_t = x_t + y_t = (1-\phi B)^{-1}(\omega_{x,t} + \omega_{y,t})$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\phi B)\, z_t = \omega_{x,t} + \omega_{y,t} = \omega_t \quad \text{der } \omega_t \sim N(0, 2\sigma^2)$$

dvs. z_t er ARMA(1,0) med $\phi_1 = \phi$ og støyvarians $2\sigma^2$

e)

$$z_{t+1}^{t} = E[z_{t+1} \mid z_0, \dots, z_t]$$

$$= E[\phi z_t + \omega_t \mid z_0, \dots, z_t] = \phi z_t + 0$$

$$z_{t+1}^{t} = \phi z_t$$

$$z_{t+2}^{t} = E[z_{t+2} \mid z_0, \dots, z_t] = E[\phi z_{t+1} + \omega_{t+1} \mid z_0, \dots, z_t]$$

$$= E[\phi(\phi z_t + \omega_t) + \omega_{t+1} \mid z_0, \dots, z_t] = \phi^2 z_t$$

$$z_{t+2}^{t} = \phi^2 z_t$$

$$\mathrm{Var}[Z_{t+1} \mid Z_0, \dots, Z_t] = \mathrm{Var}[\phi Z_t + \omega_t \mid Z_0, \dots, Z_t]$$

$$= \mathrm{Var}[\omega_t \mid Z_0, \dots, Z_t] = \mathrm{Var}[\omega_t] = 2\sigma^2$$

$$\mathrm{Var}[Z_{t+2} \mid Z_0, \dots, Z_t] = \mathrm{Var}[\phi^2 Z_t + \phi\omega_t + \omega_{t+1} \mid Z_0, \dots, Z_t]$$

$$= \mathrm{Var}[\phi\omega_t] + \mathrm{Var}[\omega_{t+1}]$$

$$= \phi^2 \cdot 2\sigma^2 + 2\sigma^2 = 2\sigma^2(1+\phi^2)$$

OPPGAVE 3

a)

$$x_t = \phi x_{t-1} + w_t \quad , \quad w_t \sim N(0, Q)$$

$$y_t = A_t x_t + v_t \quad , \quad v_t \sim N(0, R)$$

der

$$x_t = \begin{bmatrix} T_t \\ S_t \\ S_{t-1} \\ S_{t-2} \end{bmatrix} , \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad R = r_{11}$$

der $q_{11} = Var(w_t)$, $q_{22} = Var(u_t)$, $r_{11} = Var(v_t)$

Si noe fornuftig om MLE, gjerne hvordan kalman-filteret trenges i denne forbindelse.

b) Diskuter .... (se boka)

Det er rimelig å modellere sesongvariasjonen på en slik måte!