Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Arvid Næss 73 59 70 53/ 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI
12. desember 2003
Tid: 09:00–14:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Ett gult A5-ark med stempel med egne formler og notater

Sensuren faller: 9. januar 2004

Notasjon brukt i dette oppgavesettet:

$\mathbf{Z} = \{\text{alle hele tall}\}$

$\mathbf{R} = \{\text{alle reelle tall}\}$

Oppgave 1

a) Anta gitt en ARMA-modell

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \ldots - \phi_p x_{t-p} = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \ldots + \theta_q w_{t-q}, \quad t \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

hvor $\phi_j, \theta_k \in \mathbf{R}$ for $j = 1, \ldots, p$ and $k = 1, \ldots, q$ ($\phi_p \neq 0$, $\theta_q \neq 0$), og w_t er hvit støy.

Hva legges i begrepet kausalitet? Hvilke krav må være oppfylt for at tidsrekken x_t skal bli kausal?

Hva betyr det at x_t er invertibel? Hvilke krav må da være oppfylt?

b) Anta gitt følgende to MA-modeller

$$x_t = w_t - 0.8w_{t-1}, \quad t \in \mathbf{Z} \tag{2}$$

og

$$y_t = v_t - 0.9v_{t-2}, \quad t \in \mathbf{Z} \tag{3}$$

hvor w_t og v_t er to uavhengige hvit støy prosesser. Anta $w_t \sim N(0,1)$ og $v_t \sim N(0,1)$.

Diskutér kort egenskapene til de to tidsrekkene x_t og y_t i lys av punkt a).

Tidsrekken $z_t = x_t + y_t$ kan modelleres som en MA(2)-prosess bestemt av

$$z_t = u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}, \quad t \in \mathbf{Z} \tag{4}$$

hvor u_t er en hvit støy prosess, $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$, og hvor σ_u^2, θ_1 og θ_2 er passende valgte parametre. Etablér ligningene for å bestemme disse parametrene. (Hint: Pass på korrelasjonsstrukturen.)

c) Vis at $\sigma_u^2 = 2.50$ er en god tilnærmelse til løsningen av ligningen som bestemmer σ_u^2. Vis kort hvordan du kunne ha bestemt denne løsningen selv ved bruk av en iterativ løsningsmetode og en enkel kalkulator. Bestem til slutt verdiene til θ_1 og θ_2.

Oppgave 2

En tidsrekke x_t er bestemt av AR(2)-modellen

$$x_t = x_{t-1} + cx_{t-2} + w_t, \quad t \in \mathbf{Z} \tag{5}$$

hvor c er et reelt tall, $c \neq 0$, og w_t er hvit støy.

a) Vis at modellen er kausal, og x_t dermed (svakt) stasjonær, hvis og bare hvis $-1 < c < 0$.

b) Bestem autokorrelasjonsfunksjonen når $c = -3/16$.

Oppgave 3

a) Anta at betingelsene for at ARMA-modellen i oppgave 1a) skal være kausal, er tilfredsstilt. Vis at frekvensresponsfunksjonen $A(\nu)$ da er gitt som

$$A(\nu) = \frac{\theta(e^{-2\pi i\nu})}{\phi(e^{-2\pi i\nu})} \tag{6}$$

hvor $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \ldots - \phi_p z^p$ og $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q$.

b) Anta gitt de to AR(1)-modellene

$$x_t - \alpha x_{t-1} = w_t, \quad t \in \mathbf{Z} \tag{7}$$

og

$$y_t - \beta y_{t-1} = v_t, \quad t \in \mathbf{Z} \tag{8}$$

hvor $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ $|\alpha| < 1$ $(\alpha \neq 0)$, $|\beta| < 1$ $(\beta \neq 0)$, w_t og v_t er to uavhengige hvit støy prosesser. Anta $w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$ og $v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$. Dette definerer to lineære, rekursive filtre.

Beregn forventningsverdi og autokovariansfunksjon for de to tidsrekkene x_t og y_t. Påvis at de begge er svakt stasjonære. Vis også at de begge har en spektraltetthet, og bestem uttrykkene for disse.

c) Anta $\sigma_w^2 = \sigma_v^2 = 1.0$, $\alpha = 0.9$ og $\beta = -0.9$. Lag en skisse av spektraltetthetene til x_t og y_t, og forklar hvilken effekt de to filterne vil ha på et inngangssignal.

d) Anta så at de to filterne i punkt b) kjedes sammen ved at w_t erstattes med y_t. Vis at x_t da bestemmes av en AR(2)-modell

$$x_t - \gamma_1 x_{t-1} - \gamma_2 x_{t-2} = v_t, \quad t \in \mathbf{Z} \tag{9}$$

og bestem de to koeffisientene γ_1 og γ_2.

e) Finn uttrykket for spektraltettheten til den nye x_t. (Du kan anta at den eksisterer.) Ser du en sammenheng med resultater fra punkt b)? Skissér spektraltettheten for parameterverdiene fra punkt c). Hvordan vil du karakterisere dette filteret?