Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMENSOPPGAVENE I

EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

12. desember 2003
Tid: 09:00–14:00

Oppgave 1

a) x_t er en kausal tidsrekke hvis x_t kan uttrykkes på følgende måte som en en-sidig lineær prosess: $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, w_{t-j}$, hvor $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Parametrene ψ_j kan bestemmes av ligningen $\psi(z) = \theta(z)/\phi(z)$, hvor $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, z^j$, $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \ldots - \phi_p z^p$ og $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \ldots + \theta_q z^q$.

x_t er kausal hvis og bare hvis røttene i AR-polynomet $\phi(z)$ ligger utenfor enhetssirkelen.

At x_t er invertibel betyr at x_t kan representeres som en AR(∞)-modell, dvs. $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, x_{t-j} = w_t$. Forat x_t skal være invertibel, er det nødvendig og tilstrekkelig at røttene i MA-polynomet $\theta(z)$ ligger utenfor enhetsirkelen.

b) Enhver endelig MA-modell, dvs. en MA(q)-modell med endelig q, gir automatisk en kausal tidsrekke. Dermed er de to tidsrekkene x_t og y_t åpenbart kausale. De er også begge invertible siden røttene i de respektive MA-polynomene $\theta_x(z) = 1 - 0.8z$ og $\theta_y(z) = 1 - 0.9z^2$ alle har absoluttverdi større enn 1.

Observerer at $z_t = w_t + v_t - 0.8w_{t-1} - 0.9v_{t-2}$ er en stasjonær normalfordelt tidsrekke med $\mu = E(z_t) = 0$ og kovariansfunksjon $\gamma(h)$ gitt ved

$$\begin{aligned}\gamma(0) = \mathrm{Var}(z_t) &= \mathrm{Var}(w_t) + \mathrm{Var}(v_t) + 0.8^2 \mathrm{Var}(w_{t-1}) + 0.9^2 \mathrm{Var}(v_{t-2}) \\ &= 1 + 1 + 0.64 + 0.81 = 3.45\end{aligned}$$

$$\gamma(1) = \gamma(-1) = \mathrm{E}(z_t z_{t-1}) = \mathrm{E}\big((w_t + v_t - 0.8 w_{t-1} - 0.9 v_{t-2})(w_{t-1} + v_{t-1} - 0.8 w_{t-2} - 0.9 v_{t-3})\big)$$
$$= -0.8\,\mathrm{E}(w_{t-1}^2) = -0.8$$

$$\gamma(2) = \gamma(-2) = \mathrm{E}(z_t z_{t-2}) = \mathrm{E}\big((w_t + v_t - 0.8 w_{t-1} - 0.9 v_{t-2})(w_{t-2} + v_{t-2} - 0.8 w_{t-3} - 0.9 v_{t-4})\big)$$
$$= -0.9\,\mathrm{E}(v_{t-2}^2) = -0.9$$

og

$$\gamma(h) = 0, \quad |h| > 2$$

Hvis z_t skal kunne representeres ved MA(2)-modellen som beskrevet i ligning (4), må vi åpenbart kreve at

$$\mathrm{Var}(u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}) = \gamma(0) = 3.45$$

$$\mathrm{E}\big((u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2})(u_{t-1} + \theta_1 u_{t-2} + \theta_2 u_{t-3})\big) = \gamma(1) = -0.8$$

og

$$\mathrm{E}\big((u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2})(u_{t-2} + \theta_1 u_{t-3} + \theta_2 u_{t-4})\big) = \gamma(2) = -0.9$$

Dette gir følgende tre ligninger for å bestemme parametrene σ_u^2, θ_1 og θ_2.

$$\underline{(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\,\sigma_u^2 = 3.45} \tag{1}$$

$$\underline{\theta_1(1 + \theta_2)\,\sigma_u^2 = -0.8} \tag{2}$$

$$\underline{\theta_2\,\sigma_u^2 = -0.9} \tag{3}$$

c) Ved å sette inn fra de to siste ligningene i den første, får vi følgende ligning for å bestemme σ_u^2.

$$\left(1 + \frac{0.64}{(\sigma_u^2 - 0.9)^2} + \frac{0.81}{(\sigma_u^2)^2}\right)\sigma_u^2 = 3.45$$

Innsetting av $\sigma_u^2 = 2.50$ i venstresiden av ligningen gir tallet 3.449, som må sies å være en god tilnærmelse til 3.45.

Ved inspeksjon av ligningen, ser en at følgende iterative løsningsmetode kan benyttes

$$s_{j+1} = 3.45\left(1 + \frac{0.64}{(s_j - 0.9)^2} + \frac{0.81}{s_j^2}\right)^{-1} \quad j = 0, 1, \ldots$$

hvor startverdien s_0 velges passende, f.eks. $s_0 = 3$. Det gir $s_1 = 2.79$, $s_2 = 2.69$, ...

$\sigma_u^2 = 2.50$ innsatt i ligningene (1) og (2) gir $\underline{\theta_1 = -0.5 \text{ og } \theta_2 = -0.36}$.

Oppgave 2

a) AR(2)-modellen

$$x_t = x_{t-1} + cx_{t-2} + w_t, \quad t \in \mathbf{Z}$$

er kausal hvis og bare hvis røttene i polynomet $\phi(z) = 1 - z - cz^2$ ligger utenfor enhetsirkelen. Røttene, betegnet med z_1 og z_2, er gitt ved

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2\,c}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4c}\right)$$

Vi ser at for $c \geq -\frac{1}{4}$, så er røttene reelle, mens for $c < -\frac{1}{4}$, så er røttene kompleks konjugerte.

Ser på det siste tilfellet først. For $c < -\frac{1}{4}$, blir ($i = \sqrt{-1}$)

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2\,c}\left(1 \pm i\sqrt{4|c| - 1}\right)$$

Det gir

$$|z_{1,2}|^2 = \frac{1 + 4|c| - 1}{4c^2} = \frac{1}{|c|}$$

Det gir at $|z_{1,2}| > 1$ hvis og bare hvis $|c| < 1$.

I dette tilfellet får vi altså at x_t er kausal hvis og bare hvis $-1 < c < -\frac{1}{4}$.
Ser nå på tilfellet $c \geq -\frac{1}{4}$. Deler i to delproblemer: i) $c > 0$ og ii) $0 > c \geq -\frac{1}{4}$.
i) $c > 0$:

$$|z_2| = \frac{\sqrt{1+4c}-1}{2c} = 2\,\frac{\sqrt{1+4c}-1}{(\sqrt{1+4c})^2-1} = \frac{2}{\sqrt{1+4c}+1} < 1$$

for alle $c > 0$. Dermed kan x_t ikke være kausal for noen verdi $c > 0$.
ii) $0 > c \geq -\frac{1}{4}$:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2\,|c|}\left(1 \pm \sqrt{1-4|c|}\right)$$

Det gir at

$$|z_2| = \frac{1-\sqrt{1-4|c|}}{2|c|} < |z_1|$$

og

$$|z_2| = \frac{1-\sqrt{1-4|c|}}{2|c|} = 2\,\frac{1-\sqrt{1-4|c|}}{1-(\sqrt{1-4|c|})^2} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4|c|}} > 1$$

for alle $0 > c \geq -\frac{1}{4}$. Det gir at begge røttene i dette tilfellet ligger utenfor enhetsirkelen.
<u>Oppsummert: Modellen er kausal hvis og bare hvis $0 > c > -1$</u>.

b) Når AR-polynomet $\phi(z)$ har to ulike, reelle røtter z_1 og z_2, vil autokorrelasjonsfunksjonen $\rho(h)$, $h \in \mathbf{Z}$, være bestemt av følgende uttrykk

$$\rho(h) = c_1\, z_1^{-|h|} + c_2\, z_2^{-|h|} \tag{4}$$

For en AR(2)-modell $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + w_t$ vil autokorrelasjonen $\rho(h)$ åpenbart tilfredsstille ligningen

$$\rho(h) = \phi_1\,\rho(h-1) + \phi_2\,\rho(h-2), \quad h = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Ved å sette $h = 1$, og benytte at $\rho(-1) = \rho(1)$ og $\rho(0) = 1$, får vi lignignen

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \tag{6}$$

I denne oppgaven er $\phi_1 = 1$ og $\phi_2 = c = -\frac{3}{16}$. Det gir røttene $z_1 = 4$ og $z_2 = \frac{4}{3}$.

Vi får nå følgende to ligninger for å bestemme c_1 og c_2:

$$\rho(0) = c_1 + c_2 = 1 \tag{7}$$

$$\rho(1) = c_1 \frac{1}{4} + c_2 \frac{3}{4} = \frac{1}{1 + \frac{3}{16}} = \frac{16}{19} \tag{8}$$

Det gir $c_1 = -7/38$ og $c_2 = 45/38$, og dermed blir autokorrelasjonen

$$\underline{\rho(h) = \frac{45}{38} \cdot \Big(\frac{3}{4}\Big)^{|h|} - \frac{7}{38}\Big(\frac{1}{4}\Big)^{|h|}, \quad h \in \mathbf{Z}} \tag{9}$$

Oppgave 3

a) Når modellen er kausal, har x_t en MA(∞)-representasjon $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j w_{t-j}$, hvor $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. x_t er dermed uttrykt som et linært filter med frekvensresponsfunksjon

$$A(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{-2\pi i \nu j} \tag{10}$$

Siden $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}$ for alle $|z| \leq 1$, følger det at

$$\underline{A(\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{-2\pi i \nu j} = \frac{\theta(e^{-2\pi i \nu})}{\phi(e^{-2\pi i \nu})}} \tag{11}$$

b) Siden $|\alpha| < 1$, ligger roten $z_1 = 1/\alpha$ i AR-polynomet $1 - \alpha z$ åpenbart utenfor enhetssirkelen ($z = \pm 1$). Dermed er x_t en kausal tidsrekke og $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j w_{t-j}$. Det gir $E(x_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j E(w_{t-j}) = 0$ og

$$E(x_t x_{t+h}) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \alpha^{j+h} \sigma_w^2 = \sigma_w^2 \alpha^h \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} = \frac{\sigma_w^2}{1-\alpha^2} \alpha^h \quad (h \geq 0) \tag{12}$$

Siden $E(x_t) =$ konstant og $E(x_t x_{t+h})$ bare avhenger av h, følger det at x_t er svakt stasjonær. Siden også $|\beta| < 1$, gjelder det samme for y_t.

x_t karakteriseres av en spektraltetthet $f_x(\nu)$ hvis $\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_x(h)| < \infty$, hvor $\gamma_x(h)$ betegner autokovariansfunksjonen til x_t. Denne betingelsen er tilfredsstilt siden

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\gamma_x(h)| = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_w^2}{1-\alpha^2} |\alpha|^h = \frac{\sigma_w^2}{(1-\alpha^2)(1-|\alpha|)} < \infty \tag{13}$$

Frekvensresponsfunksjonen $A_x(\nu)$ for filteret i ligning (7) er ifølge punkt a) gitt ved

$$A(\nu) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-2\pi i \nu}} \tag{14}$$

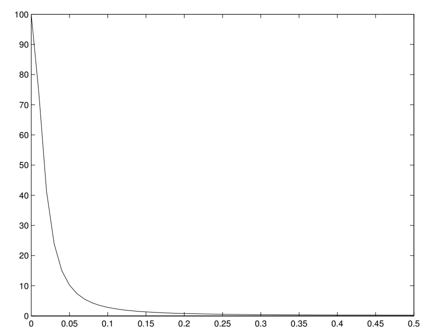
Spektraltettheten til x_t er dermed gitt ved

$$\underline{f_x(\nu) = |A_x(\nu)|^2 \sigma_w^2 = \frac{\sigma_w^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi\nu)}} \tag{15}$$

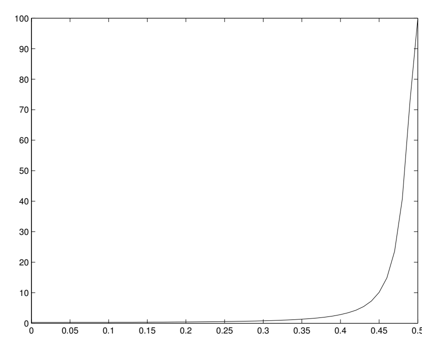
Helt analogt finner vi at y_t har en spektraltetthet $f_y(\nu)$ som er gitt ved

$$\underline{f_y(\nu) = |A_y(\nu)|^2 \sigma_v^2 = \frac{\sigma_v^2}{1 + \beta^2 - 2\beta \cos(2\pi\nu)}} \tag{16}$$

c) Skisse av de to filternes spektraltettheter



Figur 1: Spektraltettheten til x-filteret.



Figur 2: Spektraltettheten til y-filteret.

X-filteret gir en sterk lavpassfiltrering, mens y-filteret gir en sterk høypassfiltrering.

d) Når w_t erstattes med y_t, får vi ligningen $x_t - \alpha x_{t-1} = y_t$ og dermed også $\beta(x_{t-1} - \alpha x_{t-2}) = \beta y_{t-1}$. Kombineres disse to ligningene, får vi

$$x_t - \alpha x_{t-1} - \beta(x_{t-1} - \alpha x_{t-2}) = y_t - \beta y_{t-1} = v_t \tag{17}$$

Skrevet ut, gir det

$$x_t - (\alpha + \beta)x_{t-1} + \alpha\beta x_{t-2} = v_t \tag{18}$$

som gir $\underline{\gamma_1 = \alpha + \beta \text{ og } \gamma_2 = -\alpha\beta}$.

e) Ifølge punkt a), er frekvensresponsfunksjonen $B(\nu)$ for det kombinerte filteret gitt ved

$$B(\nu) = \frac{1}{1 - \gamma_1 e^{-2\pi i\nu} - \gamma_2 e^{-4\pi i\nu}} = \frac{1}{1 - (\alpha + \beta)e^{-2\pi i\nu} + \alpha\beta e^{-4\pi i\nu}} \tag{19}$$

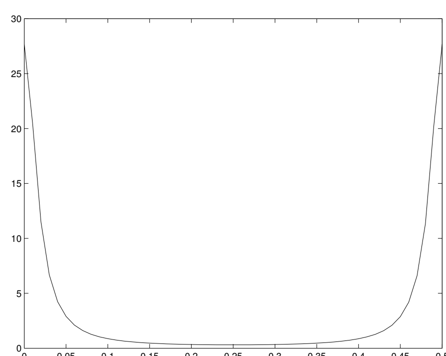
Nevneren kan åpenbart faktoriseres, og vi kan skrive

$$B(\nu) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-2\pi i\nu})(1 - \beta e^{-2\pi i\nu})} = A_x(\nu)\, A_y(\nu) \tag{20}$$

Spektraltettheten $g_x(\nu)$ til den nye x_t blir dermed

$$\underline{g_x(\nu) = |A_x(\nu)|^2 |A_y(\nu)|^2 \sigma_v^2 = \frac{\sigma_v^2}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos(2\pi\nu))(1 + \beta^2 - 2\beta\cos(2\pi\nu))}} \tag{21}$$

En skisse av $g_x(\nu)$ for parameterverdiene fra punkt c):



Figur 3: Spektraltettheten til det nye x-filteret.

Vi ser at filteret i stor grad bare slipper igjennom høye og lave frekvenser.