Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

Faglig kontakt under eksamen:
Arvid Næss 73 59 70 53/ 99 53 83 50

EKSAMEN I EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

15. desember 2004
Tid: 09:00–13:00

Hjelpemidler: *Tabeller og formler i statistikk*, Tapir Forlag
K. Rottmann: *Matematisk formelsamling*
Kalkulator HP30S
Ett gult A5-ark med stempel med egne formler og notater

Sensuren faller: 12. januar 2005

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i dette oppgavesettet:

- Z_t er hvit støy med varians σ^2, dvs. $Z_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.
- B er *backshift*-operatoren, slik at $B^j X_t \equiv X_{t-j}$, $j \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$
- ACVF = autokovarians-funksjon, ACF = autokorrelasjons-funksjon.

Oppgave 1

Anta at tidsrekken X_t er en ARMA(p,q)-prosess definert ved

$$\phi(B)\,X_t = \theta(B)\,Z_t\,; \quad t \in \mathbf{Z} \tag{1}$$

hvor AR-polynomet $\phi(z) = 1 - \phi_1\,z - \ldots - \phi_p\,z^p$, og MA-polynomet $\theta(z) = 1 + \theta_1\,z + \ldots + \theta_q\,z^q$.

a) Hvilke betingelser er oppfylt når X_t er en ARMA(p,q)-prosess? Diskutér spesielt hvilke krav som må stilles til AR- og MA-polynomene.

b) Hva betyr det at X_t er en kausal tidsrekke, og hvordan kan det uttrykkes? Hva med invertibel?

Hvilke krav må stilles til AR- og MA-polynomene for å sikre at X_t skal være både kausal og invertibel?

La ϕ og θ betegne reelle konstanter. Tidsrekken X_t definert i ligning (1), skal nå spesialiseres til følgende modell:

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta\,Z_{t-1} + 0.5\,Z_{t-2}\,; \quad t \in \mathbf{Z} \tag{2}$$

c) For hvilke verdier av ϕ og θ er X_t både kausal og invertibel?

d) Bestem MA(∞)-representasjonen av X_t når den er kausal, og verifisér at kravet for konvergens er oppfylt.

Oppgave 2

La ϕ betegne en reell konstant, og anta at $|\phi| < 1$. Betrakt tidsrekken X_t definert som følger:

$$X_1 = Z_1 \tag{3}$$

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t\,; \quad t = 2, 3, \ldots \tag{4}$$

a) Bestem middelverdi og varians til X_t for $t = 1, 2, \ldots$, og vis at

$$\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2\,\phi^h \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}$$

for $t \geq 1$ og $h \geq 0$.

Er X_t en stasjonær tidsrekke?

b) Argumentér for at X_t kan betraktes som stasjonær for store verdier av t. Beskriv deretter hvordan du rent praktisk kan bruke dette til å simulere n observasjoner av en stasjonær Gaussisk AR(1)-modell ut fra simulerte verdier fra en IID N(0, 1)-prosess, dvs. uavhengig, identisk fordelt Gaussisk hvit støy med varians lik 1.0.

c) Anta at den første ligningen erstattes med

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\phi^2}} Z_1 \tag{5}$$

Er den resulterende tidsrekken stasjonær?

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi anta at $Z_t \sim$ IID $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. La tidsrekken Y_t være en kausal ARMA(1,1)-prosess gitt ved

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + Z_t + \theta\, Z_{t-1}\,; \quad t \in \mathbf{Z} \tag{6}$$

hvor det antas at $\phi > 0$.

a) Bestem ligningene som ACVF $\gamma_Y(\cdot)$ til Y_t tilfredsstiller, og bestem $\gamma_Y(h)$ for $h \geq 0$. Vis at tilhørende ACF er gitt ved

$$\rho_Y(h) = \frac{(1+\theta\phi)(\phi+\theta)}{1+2\theta\phi+\theta^2}\phi^{h-1}; \quad h \geq 1 \tag{7}$$

Y_t kan, under visse betingelser, betraktes som gitt av følgende tilstandsrom-representasjon:

$$Y_t = X_t + V_t\,; \quad t \in \mathbf{Z} \tag{8}$$

og

$$X_{t+1} = \phi X_t + W_t\,; \quad t \in \mathbf{Z} \tag{9}$$

for passende valg av 'hvit støy'-prosesser V_t og W_t, hvor $V_t \sim$ IID $\mathrm{N}(0, \sigma_V^2)$, $W_t \sim$ IID $\mathrm{N}(0, \sigma_W^2)$, $E[V_t W_s] = 0$ for alle s og t. Du kan også anta at $E[X_t V_s] = 0$ for alle s og t.

b) Bestem ACVF til Y_t gitt av ligningene (8) og (9). Vis at ACF til Y_t er gitt ved uttrykket

$$\rho_Y(h) = \left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2}\left(1-\phi^2\right)\right)^{-1}\phi^h; \quad h \geq 1 \tag{10}$$

c) ACVF til Y_t gitt av ligningene (8) og (9) er identisk, under visse betingelser, med ACVF til Y_t bestemt av ligning (6). Vis det ved å vise at σ_V og σ_W kan uttrykkes ved σ, ϕ og θ, og bestem hvilke verdier for θ som kan tillates.