Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMENSOPPGAVENE I

EMNE TMA4285 TIDSREKKER OG FILTERTEORI

15. desember 2004
Tid: 09:00–13:00

Oppgave 1

a) For at X_t skal være en ARMA-prosess må den være stasjonær, og AR- og MA-polynomet kan ikke ha felles røtter. Stasjonaritet sikres ved at $\phi(z) \neq 0$ for $|z| = 1$ ($z \in \mathbf{C}$ = de komplekse tall).

b) X_t er en kausal tidsrekke hvis X_t kan uttrykkes på følgende måte som en en-sidig lineær prosess: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, Z_{t-j}$, hvor $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Dette er en MA($\infty$)-modell.

At X_t er invertibel betyr at X_t kan representeres som en AR(∞)-modell, dvs. $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, X_{t-j} = Z_t$., hvor $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$.

X_t er kausal hvis og bare hvis røttene i AR-polynomet $\phi(z)$ ligger utenfor enhetsdisken i $\mathbf{C}$, dvs. $\phi(z) \neq 0$ for $|z| \leq 1$.

Forat X_t skal være invertibel, er det nødvendig og tilstrekkelig at røttene i MA-polynomet $\theta(z)$ ligger utenfor enhetsdisken.

c) AR-polynomet har åpenbart roten $z = 1/\phi$. Denne ligger utenfor enhetsdisken hvis og bare hvis $|\phi| < 1$.

MA-polynomet er nå $\theta(z) = 1 + \theta z + 0.5z^2$.

Røttene, betegnet med z_1 og z_2, er gitt ved

$$z_{1,2} = -\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 2}$$

Vi ser at for $|\theta| \geq \sqrt{2}$, så er røttene reelle, mens for $|\theta| < \sqrt{2}$, så er røttene kompleks konjugerte.

Ser på det siste tilfellet først. For $|\theta| < \sqrt{2}$, blir ($i = \sqrt{-1}$)

$$z_{1,2} = -\theta \pm i\sqrt{2-\theta^2}$$

Det gir

$$|z_{1,2}|^2 = \theta^2 + 2 - \theta^2 = 2$$

Det gir at $|z_{1,2}| > 1$ for $|\theta| < \sqrt{2}$.

Anta så $\theta \geq \sqrt{2}$:

Da er $z_2 < z_1 = -\theta + \sqrt{\theta^2 - 2} < 0$. Må derfor kreve $-\theta + \sqrt{\theta^2-2} < -1$, som gir $\theta < 3/2$.

Tilsvarende, for $\theta \leq -\sqrt{2}$ blir $0 < z_2 = -\theta - \sqrt{\theta^2-2} < z_1$. Må derfor kreve $-\theta - \sqrt{\theta^2-2} > 1$, som gir $\theta > -3/2$.

Dermed ligger røttene i MA-polynomet utenfor enhetsdisken hvis og bare hvis $|\theta| < 3/2$.

Konklusjon: X_t er både kausal og invertibel hvis og bare hvis $|\phi| < 1$ og $|\theta| < 3/2$.

d) For MA(∞)-representasjonen $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$ kan koeffisientene ψ_j bestemmes av ligningen $\psi(z) = \theta(z)/\phi(z)$, hvor $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j$, $\phi(z) = 1 - \phi z$ og $\theta(z) = 1 + \theta z + 0.5z^2$. Det gir ligningen

$$\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \ldots = \frac{1 + \theta z + 0.5z^2}{1 - \phi z} = (1 + \theta z + 0.5z^2)(1 + \phi z + \phi^2 z^2 + \ldots)$$

Sammenligning av koeffisientene foran z^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, gir

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 = \phi + \theta$$
$$\psi_2 = \phi^2 + \phi\theta + 0.5$$
$$\psi_3 = (\phi^2 + \phi\theta + 0.5)\,\phi$$
$$\vdots$$
$$\psi_j = (\phi^2 + \phi\theta + 0.5)\,\phi^{j-2}\,; \quad j = 2, 3, \ldots$$

Herav følger at $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ hvis og bare hvis $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j < \infty$, og det holder åpenbart siden $|\phi| < 1$.

Oppgave 2

a) $\mathrm{E}[X_t] = 0$ siden $\mathrm{E}[Z_t] = 0$.

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^2 = \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{E}[X_t^2] &= \mathrm{E}[(\phi X_{t-1} + Z_t)(\phi X_{t-1} + Z_t)] \\
&= \phi^2 E[X_{t-1}^2] + \sigma^2 \\
&= \phi^2 \sigma_{t-1}^2 + \sigma^2 = \phi^2(\phi^2 \sigma_{t-2}^2 + \sigma^2) + \sigma^2 \\
&= \phi^4 \sigma_{t-2}^2 + \sigma^2(1 + \phi^2) \\
&\vdots \\
&= \phi^{2(t-1)} \sigma_1^2 + \sigma^2(1 + \phi^2 + \ldots \phi^{2(t-2)}) \\
&= \sigma^2(1 + \phi^2 + \ldots + \phi^{2(t-1)}) \\
&= \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}
\end{aligned}
$$

siden $\sigma_1 = \sigma$.

Et følgeresultat av stasjonaritet er at variansen er konstant, dvs. uavhengig av tident t. Det er åpenbart ikke tilfelle her, og X_t er derfor ikke stasjonær.

La $h \geq 0$ og $t \geq 1$. Da er

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) &= \mathrm{E}[X_t X_{t+h}] = \mathrm{E}[X_t(\phi X_{t+h-1} + Z_{t+h})] = \phi\,\mathrm{E}[X_t X_{t+h-1}] = \ldots \\
&= \phi^h \mathrm{E}[X_t^2] = \phi^h\,\sigma_t^2 \\
&= \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}\,\phi^h \qquad (1)
\end{aligned}
$$

b) Vi ser av ligning (1) ovenfor at

$$
\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \sigma^2 \frac{\phi^h}{1 - \phi^2}
$$

Siden grenseverdien for store t eksisterer og er bare avhengig av h, kan vi tilnærmet si at X_t er stasjonær for store t.

Siden Z_t er IID N(0,1), blir X_t en gaussisk tidsrekke. For store t blir derfor X_t tilnærmet en stasjonær gaussisk tidsrekke som tilfredsstiller ligning (4), dvs. X_t blir tilnærmet en gaussisk AR(1)-prosess for store t.

En praktisk simulering av n observasjoner fra en gaussisk AR(1)-prosess (med $|\phi| < 1$) kan da oppnås ved å simulere fra den gitte modellen over et tidsintervall med lengde T slik at $|\phi|^{T-n} < \varepsilon$, hvor ε er en valgt nøyaktighet. (Dvs. tall mindre enn ε blir betraktet som null.)

c) Ligning (5) gir at

$$\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(X_1) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

Anta $\sigma_t^2 = \sigma_1^2$. Vi har

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1}^2 &= \phi^2\sigma_t^2 + \sigma^2 = \phi^2\sigma_1^2 + \sigma^2 \\ &= \phi^2\,\frac{\sigma^2}{1-\phi^2} + \sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\end{aligned}$$

Per induksjon følger at $\sigma_t^2 = \sigma_1^2$ for alle t. Siden $\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma_t^2\,\phi^h$ $(h \geq 0)$, følger at

$$\mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \sigma^2\,\frac{\phi^h}{1-\phi^2}$$

Dermed er X_t stasjonær.

Oppgave 3

a) Ligning (6) gir relasjonen

$$\gamma_Y(h) - \phi\,\gamma_Y(h-1) = 0\,; \quad h = 2, 3, \ldots$$

Det medfører at $\gamma_Y(h) = \gamma(1)\,\phi^{h-1}$.
Tilsvarende finner vi at

$$\gamma_Y(0) = \phi\,\gamma_Y(1) + \sigma^2\,(1 + \phi\theta + \theta^2)$$

og

$$\gamma_Y(1) = \phi\,\gamma_Y(0) + \sigma^2\,\theta$$

Ved å løse de to siste ligningene, finner vi at

$$\gamma_Y(0) = \sigma^2\,\frac{1 + 2\phi\theta + \theta^2}{1-\phi^2}$$

og

$$\gamma_Y(1) = \sigma^2\,\frac{(1+\phi\,\theta)(\phi+\theta)}{1-\phi^2}$$

Dermed er $\gamma_Y(h)$ fullstendig bestemt, og vi finner at ACF er gitt ved

$$\rho_Y(h) = \frac{(1+\phi\,\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}\,\phi^{h-1}$$

b) Fra ligning (9) og resultatene i punkt a) (eller Oppgave 2) finner vi at

$$\gamma_X(h) = \sigma_W^2 \frac{\phi^h}{1-\phi^2}\,; \quad h = 0, 1, 2, \ldots$$

Ligning (8) gir at

$$\gamma_Y(0) = \mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(X_t + V_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_V^2$$

og for $h \geq 1$

$$\gamma_Y(h) = \mathrm{Cov}(Y_{t+h}, Y_t) = \mathrm{Cov}(X_{t+h} + V_{t+h}, X_t + V_t) = \gamma_X(h)$$

Herav følger at for $h \geq 1$ er ACF til Y_t gitt ved

$$\rho_Y(h) = \frac{\sigma_W^2 \frac{\phi^h}{1-\phi^2}}{\frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_V^2} = \left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2}\left(1-\phi^2\right)\right)^{-1} \phi^h$$

c) Vi ser at ACF til Y_t blir identisk i de to tilfellene når

$$\left(1 + \frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2}\left(1-\phi^2\right)\right)^{-1} \phi = \frac{(1+\phi\,\theta)(\phi+\theta)}{1+2\phi\theta+\theta^2}$$

Dermed, hvis likhet kan oppnås i denne ligningen, og variansen er den samme, dvs.

$$\frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_V^2 = \sigma^2\,\frac{1+2\phi\theta+\theta^2}{1-\phi^2}$$

så er åpenbart de to ACVFene identiske.

Løser vi den første ligningen over, får vi at

$$\frac{\sigma_V^2}{\sigma_W^2} = \frac{-\,\theta}{(1+\phi\,\theta)(\phi+\theta)}$$

Ved å bruke den andre ligningen, finner vi at

$$\sigma_W^2 = \sigma^2(1+\phi\,\theta)(1+\theta/\phi)$$

og til slutt

$$\sigma_V^2 = -\,\sigma^2\frac{\theta}{\phi}$$

$\sigma_V^2 > 0$ krever at $\theta < 0$. Fra utrykket for σ_W^2 ser vi at $\sigma_W^2 > 0$ for $\theta < -1/\phi$ og $\theta > -\phi$. Dermed blir det tillatte verdiområdet for θ: $-\infty < \theta < -1/\phi$ og $-\phi < \theta < 0$. For slike verdier på θ kan vi alltid finne passende verdier for σ_V og σ_W slik at de to ACVFene blir identiske.