Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Bokmål

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMENSOPPGAVENE I

EMNE TMA4285 TIDSREKKEMODELLER

17. desember 2005
Tid: 09:00–13:00

Oppgave 1

a) For at X_t skal være en ARMA-prosess må den være stasjonær, og AR- og MA-polynomet kan ikke ha felles røtter. Stasjonaritet sikres ved at $\phi(z) \neq 0$ for $|z| = 1$ ($z \in \mathbf{C}$ = de komplekse tall). Stasjonaritet krever dermed at $|\phi| \neq 1$, siden de to røttene til $\phi(z) = 1 - \phi^2 z^2$ er $1/\phi$ og $-1/\phi$. Siden roten til MA-polynomet $\theta(z) = 1 + \theta z$ er $-1/\theta$, vil kravet om ikke felles røtter være oppfylt hvis og bare hvis $\phi \neq \pm\theta$.

b) X_t er en kausal tidsrekke hvis X_t kan uttrykkes på følgende måte som en en-sidig lineær prosess: $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, Z_{t-j}$, hvor $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Dette er en MA($\infty$)-modell.

At X_t er invertibel betyr at X_t kan representeres som en AR(∞)-modell, dvs. $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, X_{t-j} = Z_t$., hvor $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$.

X_t er kausal hvis og bare hvis røttene i AR-polynomet $\phi(z)$ ligger utenfor enhetsdisken i $\mathbf{C}$, dvs. $\phi(z) \neq 0$ for $|z| \leq 1$. Det vil være oppfylt for $1/|\phi| > 1$, eller $|\phi| < 1$.

Forat X_t skal være invertibel, er det nødvendig og tilstrekkelig at røttene i MA-polynomet $\theta(z)$ ligger utenfor enhetsdisken. Det er oppfylt for $|\theta| < 1$.

c) Representasjonen $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \, Z_{t-j}$, som gjelder siden $|\phi| < 1$, gir at $\mathrm{E}[X_t] = 0$ og $\mathrm{E}[X_t Z_s] = 0$ for $s > t$. Ligning (1) kan skrives som

$$X_t = \phi^2 X_{t-2} + Z_t + \theta Z_{t-1}$$

Det gir

$$\mathrm{E}[X_t X_t] = \phi^4 \mathrm{E}[X_{t-2} X_{t-2}] + 2\phi^2 \mathrm{E}[X_{t-2}(Z_t + \theta Z_{t-1})] + \mathrm{E}[(Z_t + \theta Z_{t-1})^2]$$

Herav

$$\gamma(0) = \phi^4\gamma(0) + \sigma^2(1+\theta^2)$$

som gir resultatet

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{1+\theta^2}{1-\phi^4}$$

Tilsvarende finner vi at

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_t X_{t+1}] &= \phi^4 \mathrm{E}[X_{t-2}X_{t-1}] + \phi^2 \mathrm{E}[X_{t-1}(Z_t + \theta Z_{t-1})] \\
&\quad + \phi^2 \mathrm{E}[X_{t-2}(Z_{t+1} + \theta Z_t)] + \mathrm{E}[(Z_t + \theta Z_{t-1})(Z_{t+1} + \theta Z_t)] \\
&= \phi^4 \mathrm{E}[X_{t-2}X_{t-1}] + \phi^2\theta \mathrm{E}[X_{t-1}Z_{t-1}] + \theta \mathrm{E}[Z_t^2].
\end{aligned}$$

Herav

$$\gamma(1) = \phi^4\gamma(1) + \sigma^2\theta\phi^2 + \sigma^2\theta,$$

siden $\mathrm{E}[X_{t-1}Z_{t-1}] = \phi^2\mathrm{E}[X_{t-3}Z_{t-1}] + \mathrm{E}[Z_{t-1}^2] + \theta\mathrm{E}[Z_{t-2}Z_{t-1}] = \mathrm{E}[Z_{t-1}^2] = \sigma^2$. Det gir

$$\gamma(1) = \sigma^2 \, \frac{\theta(1+\phi^2)}{1-\phi^4} = \sigma^2 \frac{\theta}{1-\phi^2}$$

For $h > 1$, finner vi at

$$\mathrm{E}[X_t X_{t+h}] = \phi^2 \mathrm{E}[X_t X_{t+h-2}] + \mathrm{E}[X_t Z_{t+h}] + \theta \mathrm{E}[X_t Z_{t+h-1}] = \phi^2 \mathrm{E}[X_t X_{t+h-2}],$$

som gir

$$\gamma(h) = \phi^2\gamma(h-2)$$

Dermed er

$$\gamma(2k) = \phi^{2|k|}\gamma(0)\,, \quad k \in \mathbf{Z}$$

og

$$\gamma(2k+1) = \phi^{2|k|}\gamma(1)\,, \quad k \in \mathbf{Z}$$

d) For $\theta = 0$ får vi at

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^4}$$

dvs. at

$$\gamma(2k) = \phi^{2|k|}\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^4}\,\phi^{2|k|}\,, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$\theta = 0$ gir også at $\gamma(1) = 0$, og dermed er $\gamma(2k+1) = 0$ for alle $k \in \mathbf{Z}$.

Oppgave 2

a) Anta en AR(1)-modell

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t.$$

Siden $\rho(h) = \phi^h$ $(h > 0)$ for en AR(1)-modell, og det er beregnet at $\hat{\rho}(2) = 0.145$, skal vi anta at $\phi^2 << 1$. Ved å bruke Bartletts formel, får vi følgende tilnærmede uttrykk:

$$\mathrm{Var}[\hat{\rho}(1)] \approx \frac{1}{n} w_{11} = \frac{1}{n}\big(1 - \phi^2\big)$$

og

$$\mathrm{Var}[\hat{\rho}(2)] \approx \frac{1}{n} w_{22} = \frac{1}{n}\big(1 - \phi^2\big)\big(1 + 3\phi^2\big) \approx \frac{1}{n}\big(1 + 2\phi^2\big)$$

Dvs., 95% konfidens-grenser for $\rho(1)$ er tilnærmet

$$\hat{\rho}(1) \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \phi^2}$$

Tilsvarende, 95% konfidens-grenser for $\rho(2)$ er tilnærmet

$$\hat{\rho}(2) \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sqrt{(1 - \phi^2)(1 + 3\phi^2)}$$

Med ϕ erstattet med $\hat{\phi} = \hat{\rho}(1)$ i formlene ovenfor, og med $n = 100$, $\hat{\rho}(1) = 0.438$, $\hat{\rho}(2) = 0.145$, blir disse grensene for $\rho(1)$: 0.262, 0.614, og for $\rho(2)$: -0.073, 0.369.

Disse verdiene er ikke konsistente med $\phi = 0.8$, siden både $\rho(1) = \phi = 0.8$ and $\rho(2) = \phi^2 = 0.64$ er utenfor disse grensene.

b) Anta en MA(1)-modell

$$X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$$

Bartletts formel gir følgende tilnærmede uttrykk

$$\mathrm{Var}[\hat{\rho}(1)] \approx \frac{1}{n}\big(1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4\big)$$

og

$$\mathrm{Var}[\hat{\rho}(2)] \approx \frac{1}{n}\big(1 + 2\rho(1)^2\big)$$

Dvs., 95% konfidens-grenser for $\rho(1)$ er tilnærmet

$$\hat{\rho}(1) \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4}$$

Tilsvarende, 95% konfidens-grenser for $\rho(2)$ er tilnærmet

$$\hat{\rho}(2) \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + 2\rho(1)^2}$$

Med $\rho(1)$ erstattet med $\hat{\rho}(1)$ i formlene ovenfor, og med de samme tallene som i punkt a), finner vi følgende grenser for $\rho(1)$: 0.290, 0.586, og for $\rho(2)$: -0.082, 0.378.

$\theta = 0.6$ gir $\rho(1) = \frac{\theta}{1+\theta^2} = 0.4412$, $\rho(2) = 0$. Det følger at konfidens-grensene er konsistente med disse to verdiene, og observasjonene er derfor konsistente med MA(1)-modellen $X_t = Z_t + 0.6Z_{t-1}$

Oppgave 3

a) La $V_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}$. Siden X_t er stasjonær, er $\mathrm{E}[X_t] = \mu =$ konstant. Det gir at $\mathrm{E}[V_t] = \mu - \mu = 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[V_t V_{t+h}] &= \mathrm{E}[X_t X_{t+h}] - \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t+h}] - \mathrm{E}[X_t X_{t+h-1}] + \mathrm{E}[X_{t-1}X_{t+h-1}] \\ &= \gamma_X(h) - \gamma_X(h+1) - \gamma_X(h-1) + \gamma_X(h),\end{aligned}$$

hvor formelen $\gamma_X(h) = \mathrm{E}[X_t X_{t+h}] - \mu^2$ er brukt. Dermed følger at V_t er stasjonær med ACVF $\gamma_V(h) = 2\,\gamma_X(h) - \gamma_X(h+1) - \gamma_X(h-1)$. Siden $\nabla^k X_t = \nabla(\nabla^{k-1}X_t)$, følger det pr. induksjon at $\nabla^k X_t$ er stasjonær for $k = 1, 2, \ldots$.

b) Fra ligning (8) finner vi at

$$\nabla Y_t = 2\beta_2 t - \beta_2 + \nabla X_t$$

Dermed er det klart at ∇Y_t ikke er stasjonær (forutsetter $\beta_2 \neq 0$). Differensiering en gang til gir at

$$\nabla^2 Y_t = 2\beta_2 + \nabla^2 X_t.$$

Dermed følger fra punkt a) at $\nabla^2 Y_t$ er stasjonær. Av dette får vi at $k_0 = 2$.