Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Håvard Rue   73593533/92600021

EKSAMEN I FAG TMA4285 Tidsrekkemodeller

Mandag 17. desember 2007
Tid: 09:00–13:00

Tilatte hjelpemidler:
Godkjent kalkulator.
Statistiske tabeller og formler, TAPIR.
Rottman: Matematisk formelsamling (alle språkutgaver).

NB: Alle svar skal begrunnes.

Notasjon brukt i denne oppgaven:

- z_t er hvit Gaussisk støy med varians σ^2.

Formelsamlig:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}))$$

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{Cov}(\mathrm{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y})) + \mathrm{E}(\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}))$$

Oppgave 1

La x_t være gitt ved

$$x_t = \phi_2 x_{t-2} + w_t. \tag{1}$$

a) Hva menes med at en stokastisk prosess er (svakt) stasjonær?
Hva menes med at en stokastisk prosess er invertibel?
For hvilke verdier av ϕ_2 er x_t stasjonær?
For hvilke verdier av ϕ_2 er x_t invertibel?

Anta videre at $|\phi_2| < 1$.

b) Finn prognose samt progosefeil for

$$x_{t+k} \mid x_t, x_{t-1}, \ldots$$

for $k = 1, 2, 3$ og 4.

Oppgave 2

a) La

$$x_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z_{t-j}, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$$

og la $\gamma_x(k)$ være autokovariansfunksjonen (ACF) til x_t. Vis at

$$\gamma_x(k) = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j-k}. \tag{2}$$

b) Bruk (2) til å finne autokovariansfunksjonen til prosessen

$$x_t - \phi x_{t-1} = z_t + \theta z_{t-1}, \qquad |\phi| < 1, \quad |\theta| < 1,$$

for $k = 0$ og 1.

Oppgave 3 Anta følgende tilstandsmodell ("state-space model")

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_t &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{V}_t &(3)\\ \boldsymbol{Y}_t &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{W}_t &(4) \end{aligned}$$

med standard antagelser. La $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{V}_t) = \boldsymbol{Q}$ og $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{W}_t) = \boldsymbol{R}$.

a) Representer hver av de følgende to prosesser som en tilstandsmodell:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + z_t \tag{5}$$

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + z_t + \theta z_{t-1} \tag{6}$$

b) Hvilke praktiske fordeler har vi ved å behandle en ARMA(p,q)-modell som en tilstandsmodell?

Definer

$$\boldsymbol{\mu}_{s|t} = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_s | \boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-1}, \ldots) \quad \text{og} \quad \boldsymbol{\Omega}_{s|t} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_s | \boldsymbol{Y}_t, \boldsymbol{Y}_{t-1}, \ldots).$$

c) Vis at

$$\boldsymbol{\mu}_{t+k|t} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\mu}_{t+k-1|t}$$

og

$$\boldsymbol{\Omega}_{t+k|t} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{\Omega}_{t+k-1|t}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{Q}$$

for $k = 1, 2, \ldots$.
Alternativt: Finn $\boldsymbol{\mu}_{t+k|t}$ og $\boldsymbol{\Omega}_{t+k|t}$ for $k = 1, 2, 3$ og "konkluder" med at rekursjonene gjelder.

Den latente modellen (3) sies å være *stabil* ("stable") dersom alle egenverdiene til matrisen $\boldsymbol{F}$ er mindre enn 1 i absoluttverdi.

d) Vis at dersom (3)-(4) representerer AR(2)-prosessen (5), så er den latente modellen stabil hvis og bare hvis AR(2)-prosessen er stasjonær.