Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Nynorsk

Fagleg kontakt under eksamen:
John Tyssedal 73593534/41645376

EKSAMEN I TMA4285 TIDSREKKJEMODELLAR

Fredag 7. desember 2012
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemiddel: Kalkulator HP30S, CITIZEN SR-270X eller CITIZEN SR-270X College.
Statistiske tabeller og formler, Tapir forlag.
K. Rottman: Matematisk formelsamling.
Eit gult ark (A5 med stempel) med eigne handskrivne formlar og notat.

Sensur seinast ferdig måndag 7. januar 2013.

Merk: Du må gi grunn for alle svar!

Merk: Kalmanfilterlikningane er gitte på siste side av oppgåvesettet.

Oppgåve 1

Betrakt ein ARMA(1,2)-modell med forventing lik null,

$$(1 - \varphi_1 B)z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)a_t,$$

der φ_1, θ_1 og θ_2 er parametrar, B er *backshift*-operatoren, dvs. $B^k z_t = z_{t-k}$, og $\{a_t\}$ er kvit støy med forventing lik null og $\mathrm{Var}(a_t) = \sigma_a^2$.

a) Kva tyder det at $\{z_t\}$ er invertibel?
Er $\{z_t\}$ invertibel når $\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_1 = \frac{1}{2}$ og $\theta_2 = -\frac{1}{4}$?

Kva tyder det at $\{z_t\}$ er kovarians-stasjonær?
Er $\{z_t\}$ kovarians-stasjonær når $\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\theta_1 = \frac{1}{2}$ og $\theta_2 = -\frac{1}{4}$?

I resten av denne oppgåva skal vi gå ut frå at $\{z_t\}$ er både invertibel og kovarians-stasjonær. Som kjent tyder dette spesielt at $\{z_t\}$ har ein MA(∞)-representasjon, $z_t = \psi(B)a_t$.

b) Utlei formlar for koeffisientane $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ og vis at dei kan bli skrivne på forma

$$\psi_0 = 1, \psi_1 = \theta_1 - \varphi_1 \quad \text{og} \quad \psi_j = \varphi_1^{j-2}((\theta_1 - \varphi_1)\varphi_1 + \theta_2) \quad \text{for } j = 2, 3, \ldots.$$

c) Frå MA(∞)-representasjonen av $\{z_t\}$ gitt over, vis at variansen til z_t er gitt ved

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 \left[1 + (\theta_1 - \varphi_1)^2 + \frac{((\theta_1 - \varphi_1)\varphi_1 + \theta_2)^2}{1 - \varphi_1^2}\right].$$

Frå den same MA(∞)-representasjonen utlei óg ein tilsvarande formel for γ_1.

Oppgåve 2

Eit plott av ei observert tidsrekkje z_t er vist i øvre venstre hjørne av figur 1. Same figur viser óg estimert autokorrelasjonsfunksjon og partiell autokorrelasjonsfunksjon for z_t, samt den observerte tidsrekkja etter ein gongs differensiering og estimert autokorrelasjonsfunksjon og partiell autokorrelasjonsfunksjon for den differensierte tidsrekkja. Vidare i oppgåva skal vi gå ut frå at vi ønskjer å tilpasse ein ARIMA(p,d,q)-modell til z_t.

a) Ut frå plotta i figur 1 diskuter kva (tentative) verdiar du finn naturleg å nytte for p, d og q.

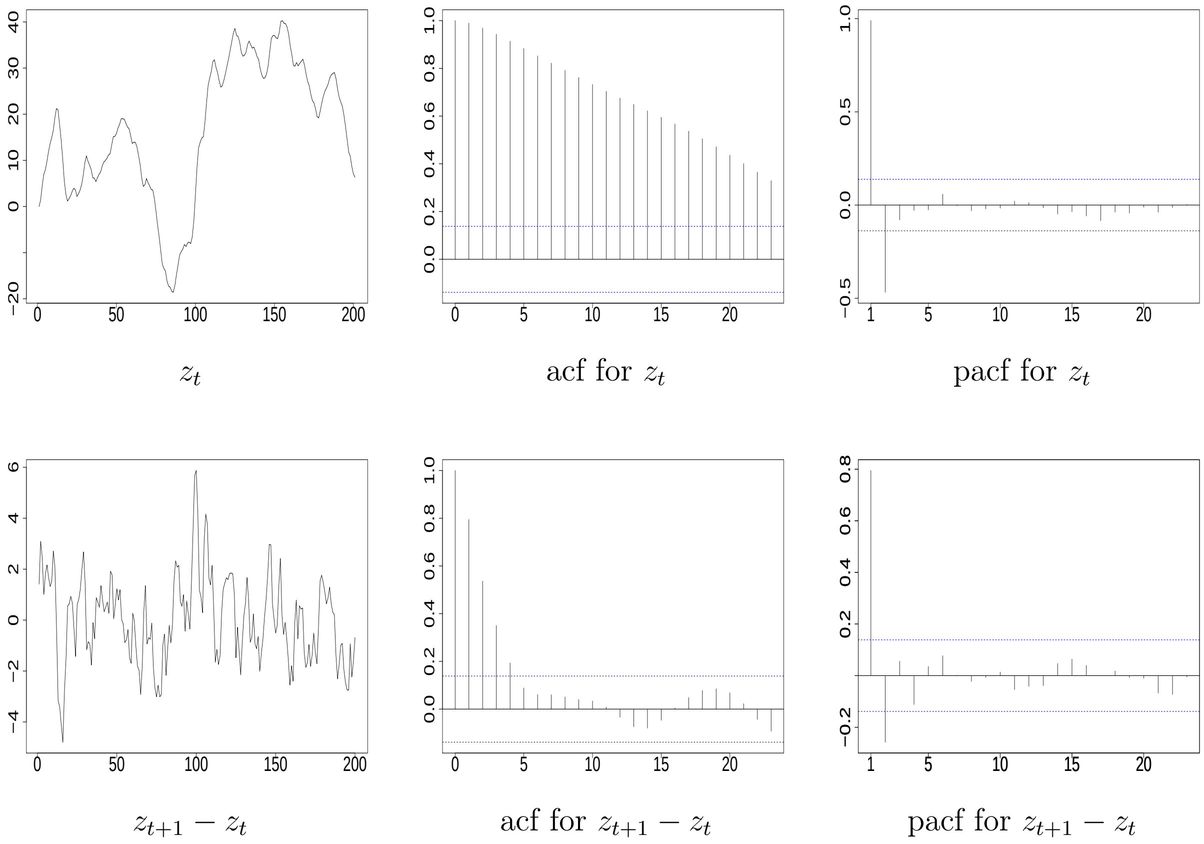
Dersom du konkluderer med at du vil forsøkje med ein modell kor $d > 0$, diskuter ut frå plotta i figur 1 om du vil inkludere ein deterministisk trendparameter, θ_0, i modellen.

Husk å gi grunn for dine val!

Uavhengig av ditt svar i spørsmålet over, gå ut frå at man vel å tilpasse heile seks modellar: ARIMA(1,1,0), ARIMA(2,1,0), ARIMA(3,1,0), ARIMA(1,1,1), ARIMA(1,1,2) og ARIMA(1,1,3), alle utan deterministisk trendparameter. Estimerte parameterverdiar med tilhøyrande standardavvik for dei seks modellane er gitt i tabell 1 og plott av estimerte residual og estimerte autokorrelasjonsfunksjonar for dei estimerte residuala er viste i figur 2.

b) Basert på resultata i tabell 1 og figur 2, diskuter kort for kvar av dei seks ARIMA-modellane om den tilhøyrande estimerte modellen er ein rimeleg modell for den observerte tidsrekkja.

Kva for ein av dei seks ARIMA-modellane vil du velje som modell for den observerte tidsrekkja?

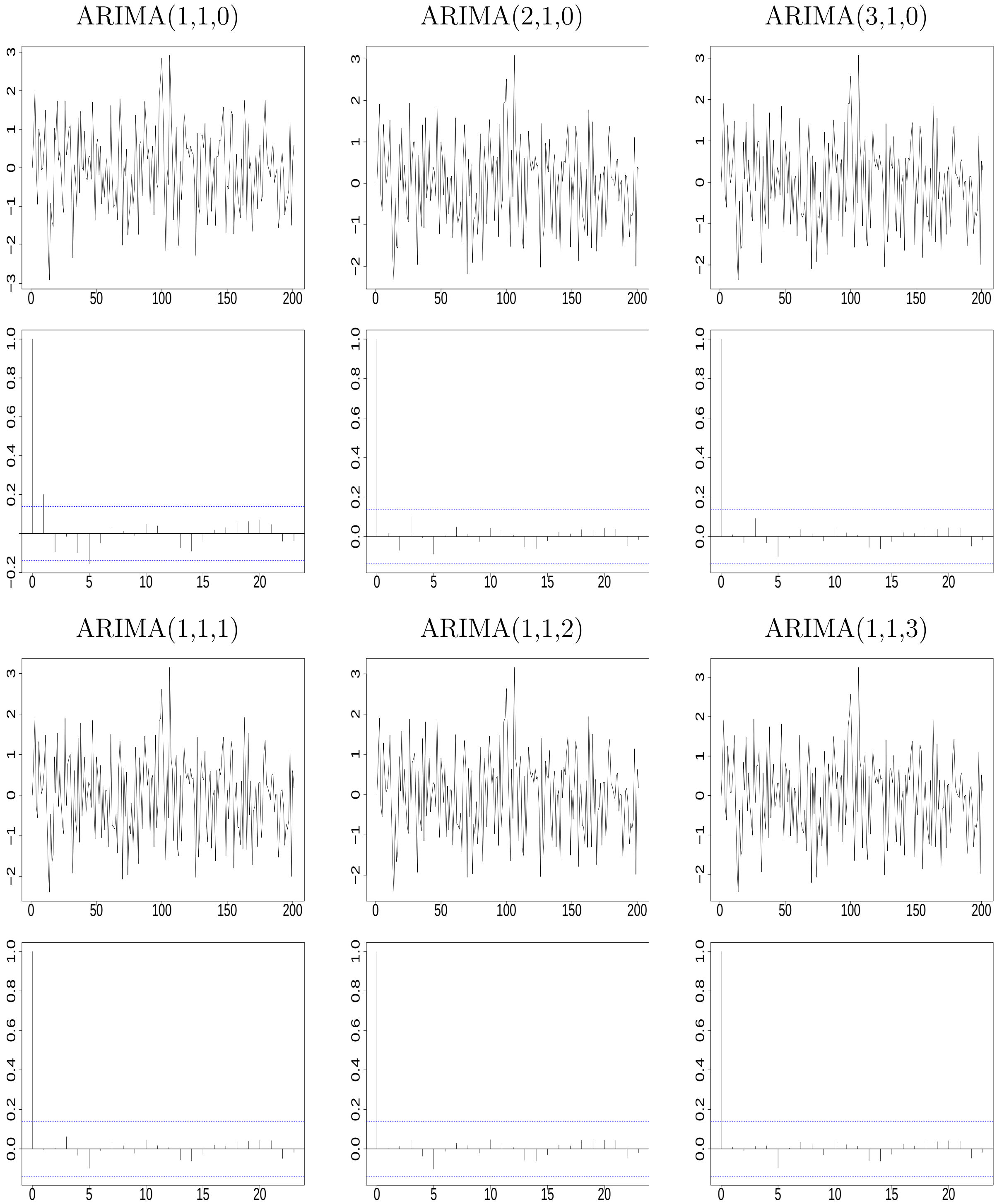


Figur 1: Øvre rad: Observert tidsrekkje z_t, samt tilhøyrande estimert autokorrelasjonsfunksjon og partiell autokorrelasjonsfunksjon. Nedre rad: Tidsrekkja z_t etter differensiering, samt tilhøyrande estimert autokorrelasjonsfunksjon og partiell autokorrelasjonsfunksjon.

	ARIMA(1,1,0)		ARIMA(2,1,0)		ARIMA(3,1,0)	
	verdi	st. avvik	verdi	st. avvik	verdi	st. avvik
φ_1	0.794	0.042	0.993	0.068	1.007	0.071
φ_2			-0.251	0.069	-0.304	0.099
φ_3					0.054	0.071
σ_a^2	1.084		1.016		1.013	
log-like	-292.36		-285.94		-285.66	
AIC	588.71		577.89		579.32	

	ARIMA(1,1,1)		ARIMA(1,1,2)		ARIMA(1,1,3)	
	verdi	st. avvik	verdi	st. avvik	verdi	st. avvik
φ_1	0.673	0.064	0.690	0.084	0.609	0.123
θ_1	0.350	0.084	0.330	0.107	0.398	0.130
θ_2			-0.0267	0.093	0.078	0.136
θ_3					0.105	0.101
σ_a^2	1.008		1.007		1.002	
log-like	-285.14		-285.10		-284.60	
AIC	576.29		578.20		579.21	

Tabell 1: Estimerte parameterverdiar med tilhøyrande standardavvik, samt optimal log-likelihood og AIC-verdiar for dei seks modellane: ARIMA(1,1,0), ARIMA(2,1,0), ARIMA(3,1,0), ARIMA(1,1,1), ARIMA(1,1,2) og ARIMA(1,1,3).



Figur 2: Estimerte residual, med tilhøyrande estimert autokorrelasjonsfunksjon for de seks modellane: ARIMA(1,1,0), ARIMA(2,1,0), ARIMA(3,1,0), ARIMA(1,1,1), ARIMA(1,1,2) og ARIMA(1,1,3).

Oppgåve 3

I denne oppgåva skal vi se på tilstandsmodellar (state-space models) på forma

$$x_{t+1} = \Phi x_t + w_{t+1} \quad \text{og} \quad y_t = Ax_t + v_t \quad \text{for } t = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

der $x_0 \sim \mathrm{N}(\mu_0, \Sigma_0)$, $w_t \sim \mathrm{N}(0, Q)$ og $v_t \sim \mathrm{N}(0, R)$. Dessutan er x_0, $w_t, t = 1, 2, \ldots$ og $v_t, t = 0, 1, \ldots$ alle uavhengige av kvarandre.

a) Reformuler følgjande prosessar til tilstandsmodellar gitt på forma i likning (1), dvs. spesifiser vektorar og matriser x_t, y_t, Φ, A, Q og R for kvar av dei to modellane,

1) $z_t = 0.9z_{t-1} + a_t$, $u_t = 0.5(z_t + z_{t-1}) + b_t$,
2) $z_t = 0.9z_{t-1} + 0.5z_{t-2} + a_t$, $r_t = 0.5(r_{t-1} + z_{t-1}) + b_t$, $u_t = 0.5(r_t + z_t) + c_t$.

Her er z_t, a_t, u_t, b_t, r_t og c_t alle skalare størrelsar, $\{a_t\}$, $\{b_t\}$ og $\{c_t\}$ er uavhengige normalfordelte kvit-støy-prosessar med forventing null og varians høvesvis σ_a^2, σ_b^2 og σ_c^2, og i båe tilfella observerer man kun prosessen $\{u_t\}$.

Vidare i oppgåva skal vi gå ut frå at vi har ein **skalar** tilstandsmodell på forma gitt i likning (1), slik at x_t, y_t, Φ, w_t, Q, A, v_t, R, μ_0 og Σ_0 alle er skalare.

b) Gå i dette punktet ut frå at $\Phi = \frac{1}{2}$, $A = 2$ og $R = 1$, og at $P = \lim_{t\to\infty} P_t^t$ eksisterer, der $P_t^t = \mathrm{Var}[x_t | y_0, \ldots, y_t]$.

Vis ved å ta utgangspunkt i kalmanfilterlikningane gitt på siste side av dette oppgåvesettet at

$$P = -\left(2Q + \frac{3}{8}\right) + \sqrt{Q + \left(2Q + \frac{3}{8}\right)^2}.$$

Skisser P som funksjon av Q. Med utgangspunkt i tilstandsmodellen som nyttes her, gi ei intuitiv forklaring på den kvalitative oppførselen av P som funksjon av Q. Forklar spesielt kvifor verdien P får når $Q = 0$ er rimeleg.

c) For ein skalar tilstandsmodell på forma gitt i likning (1), nytt eigenskapar til multinormalfordelinga til å forklare kvifor den betinga fordelinga for x_{t+1} gitt $y_0, \ldots, y_t$ er ei normalfordeling. Forklar tilsvarande at den betinga fordelinga for x_{t+1} gitt $y_0, \ldots, y_t, y_{t+1}$ óg er ei normalfordeling.

Nytt dette til å utleie formlar for

$$x_{t+1}^{t+1} = \mathrm{E}[x_{t+1}|y_0, \ldots, y_{t+1}] \quad \text{og} \quad P_{t+1}^{t+1} = \mathrm{Var}[x_{t+1}|y_0, \ldots, y_{t+1}]$$

som funksjon av

$$x_{t+1}^{t} = \mathrm{E}[x_{t+1}|y_0, \ldots, y_t], \quad P_{t+1}^{t} = \mathrm{Var}[x_{t+1}|y_0, \ldots, y_t]$$

og størrelsane som definerer tilstandsmodellen. [Merk at du **ikkje** skal nytte dei generelle kalmanfilterlikningane gitt på siste side av oppgåvesettet til å svare på dette punktet.]

Vedlegg:

Kalmanfilterlikningane (i notasjonen nytta på forelesingane):

$$
\begin{aligned}
x_{t+1}^{t} &= \Phi x_t^t \\
P_{t+1}^{t} &= \Phi P_t^t \phi^T + Q \\
x_{t+1}^{t+1} &= x_{t+1}^{t} + K_{t+1}(y_{t+1} - A_{t+1} x_{t+1}^{t}) \\
P_{t+1}^{t+1} &= [I - K_{t+1} A_{t+1}] P_{t+1}^{t} \\
K_{t+1} &= P_{t+1}^{t} A_{t+1}^{T} [A_{t+1} P_{t+1}^{t} A_{t+1}^{T} + R]^{-1}
\end{aligned}
$$