Løsningsforslag - Eksamen November 2002

Oppgave 1

a)

Invertibel: $\{x_t\}$ kan skrives på formen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j x_{t-j} = \omega_t.$$

Vi har at

$$\theta(z) = 1 + \theta z = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{\theta},$$

slik at

$$z \text{ utenfor enhetssirkelen} \Leftrightarrow |\theta| < 1.$$

Dvs. $\{x_t\}$ er invertibel hvis $|\theta| < 1$, ingen betingelser på ϕ.

Kausal: $\{x_t\}$ kan skrives på formen

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j}.$$

Vi har at

$$\phi(z) = 1 - \phi z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{\phi},$$

slik at

$$z \text{ utenfor enhetssirkelen} \Leftrightarrow |\phi| < 1.$$

Dvs. $\{x_t\}$ er kausal hvis $|\phi| < 1$, ingen betingelser på θ.

b)

$$\phi(B)x_t = \theta(B)\omega_t \Leftrightarrow x_t = \psi(B)\omega_t$$

Generelt har vi altså

$$\phi(z)\psi(z) = \theta(z),$$

som i vår situasjon gir

$$(1-\phi z)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \ldots) = 1 + \theta z$$

$$\phi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \psi_3 z^3 + \ldots - \phi\psi_0 z - \phi\psi_1 z^2 - \phi\psi_2 z^3 - \ldots = 1 + \theta z$$

Dvs.

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 - \phi\psi_0 = \theta \Rightarrow \psi_1 = \phi + \theta$$

$$\psi_2 - \phi\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi\psi_1 = \phi(\phi+\theta)$$

$$\vdots$$

$$\psi_k - \phi\psi_{k-1} = 0 \Rightarrow \psi_k = \phi\psi_{k-1} = \ldots = \phi^{k-1}(\phi+\theta); k \geq 1$$

c)

Vi har at

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \omega_{t-j},$$

der ψ_j'ene er kjent fra b). For $h \geq 0$ får man dermed

$$\gamma(h) = \mathrm{E}[x_t x_{t+h}] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\omega_{t-j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k\omega_{t+h-k}\right)\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\sum_{k=h}^{\infty}\psi_k\psi_{k-h}\omega_{t+h-k}^2\right] = \sigma_\omega^2\sum_{k=h}^{\infty}\psi_k\psi_{k-h},$$

ved å benytte at forskjellige ω_t'er er uavhengige. Spesielt for $h=0$ får man dermed

$$\gamma(0) = \sigma_\omega^2\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(\phi^{k-1}(\theta+\phi))\right) = \sigma_\omega^2\left(1 + \frac{(\theta+\phi)^2}{\phi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{2k}\right)$$

$$= \sigma_\omega^2\left(1 + \frac{(\theta+\phi)^2}{\phi^2}\cdot\frac{\phi^2}{1-\phi^2}\right) = \underline{\underline{\sigma_\omega^2\left(1 + \frac{(\theta+\phi)^2}{1-\phi^2}\right)}}.$$

For $h > 0$ får man tilsvarende

$$\gamma(h) = \sigma_\omega^2\left(\phi_h\phi_0 + \sum_{k=h+1}^{\infty}\phi_k\psi_{k-h}\right) = \sigma_\omega^2\left(\phi^{h-1}(\theta+\phi) + \sum_{k=h+1}^{\infty}\phi^{k-1}(\theta+\phi)\phi^{k-h-1}(\theta+\phi)\right)$$

$$= \sigma_\omega^2 \left(\phi^{h-1}(\theta+\phi) + \frac{(\theta+\phi)^2}{\phi^{h+2}} \sum_{k=h+1}^{\infty} \phi^{2k} \right) = \sigma_\omega^2 \left(\phi^{h-1}(\theta+\phi) + \frac{(\theta+\phi)^2}{\phi^{h+2}} \frac{\phi^{2h+2}}{1-\phi^2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\sigma_\omega^2 \phi^{h-1}(\theta+\phi)\left(1 + \frac{(\theta+\phi)\phi}{1-\phi^2}\right).}}$$

Dessuten har man at $\gamma(h) = \gamma(-h)$.
Specielt for $\theta = 0$ får man dermed

$$\gamma(0) = \sigma_\omega^2 \left(1 + \frac{\phi^2}{1-\phi^2}\right)$$

og

$$\gamma(h) = \sigma_\omega^2 \phi^h \left(1 + \frac{\phi^2}{1-\phi^2}\right), h > 0.$$

Dette kan skrives sammen som

$$\underline{\underline{\gamma(h) = \sigma_\omega^2 \left(1 + \frac{\phi^2}{1-\phi^2}\right) \phi^{|h|}, h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}}$$

d)

$$f(\nu) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \nu h} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h)(\cos(2\pi\nu h) - i \sin(2\pi\nu h))$$

$$= \gamma(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty} \gamma(h)\cos(2\pi\nu h) = \sigma_\omega^2 \left(1 + \frac{\phi^2}{1-\phi^2}\right) \left[1 + 2\sum_{h=1}^{\infty} \phi^h \cos(2\pi\nu h)\right]$$

$$= \underline{\underline{\sigma_\omega^2 \left(1 + \frac{\phi^2}{1-\phi^2}\right) \left[1 + 2 \cdot \frac{1 - \phi\cos(2\pi\nu)}{1 + \phi^2 - 2\phi\cos(2\pi\nu)}\right].}}$$

For $\phi = 0.9$ er lavere frekvenser sterkere representert enn for $\phi = 0.5$. Dette ser vi både fra plottet av $f(\nu)$ og i tilhørende realisasjoner.

Oppgave 2

a)

Det er ikke rimelig å tilpasse en ARMA(p, q)-modell til z_t da denne åpenbart er ikke-stasjonær. Derimot ser $x_t = \nabla z_t$ stasjonær ut slik at det er rimelig å tilpasse en ARMA(p, q)-modell til denne.

Acf avtar eksponensielt (ganget med en cosinusfaktor), mens pacf kan tolkes som å være lik null fra og med lag 3 eller 4. Dette er konsistent med en AR(p)-modell med $p = 2$ eller $p = 3$.

b)

Momentmetoden: Setter estimerte momenter lik tilhørende teoretiske momenter. For en AR(2)-modell blir dette

$$\widehat{\gamma}(0) = \gamma(0), \widehat{\gamma}(1) = \gamma(1) \quad \text{og} \quad \widehat{\gamma}(2) = \gamma(2).$$

Vi tenger ligningssystemet for $\gamma(h)$ i en AR(2)-modell,

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \omega_t.$$

For $h \geq 1$ får man at

$$\gamma(h) = \mathrm{E}[x_t x_{t-h}] = \mathrm{E}[\phi_1 x_{t-1} x_{t-h} + \phi_2 x_{t-2} x_{t-h} + \omega_t x_{t-h}]$$

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \phi_2 \gamma(h-2) \quad \text{for} \quad h = 1, 2, \ldots$$

Trenger også uttrykk for $\gamma(0)$:

$$\gamma(0) = \mathrm{E}[x_t \cdot x_t] = \mathrm{E}[\phi_1 x_{t-1} x_t + \phi_2 x_{t-2} x_t + \omega_t x_t]$$

$$= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \mathrm{E}[\phi_1 x_{t-1} \omega_t + \phi_2 x_{t-2} \omega_t + \omega_t^2]$$

$$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \sigma_\omega^2$$

Momentestimatorene blir dermed gitt ved

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_\omega^2 = \widehat{\gamma}(0) &= \widehat{\phi}_1 \widehat{\gamma}(1) + \widehat{\phi}_2 \widehat{\gamma}(2) \\ \widehat{\gamma}(1) &= \widehat{\phi}_1 \widehat{\gamma}(0) + \widehat{\phi}_2 \widehat{\gamma}(2) \\ \widehat{\gamma}(2) &= \widehat{\phi}_1 \widehat{\gamma}(1) + \widehat{\phi}_2 \widehat{\gamma}(0), \end{aligned}$$

som gir

$$\widehat{\phi}_1 = 1.232, \widehat{\phi}_2 = -0.599 \quad \text{og} \quad \widehat{\sigma}_\omega^2 = 0.930.$$

c)

AR(3)-modellen har best (lavest) AIC-verdi. P-verdiene er også høyest for AR(3)-modellen og pacf for AR(2)-modellen er signifikant forskjellig fra null for lag 2. Alt dette indikerer altså at vi skal foretrekke AR(3)-modellen.

Oppgave 3

a)

Skriver $\widetilde{P} = \lim_{t\to\infty} P_t^{t-1}$ i tillegg til notasjonen gitt i oppgaveteksten. Lar man $t \to \infty$ i kalmnafilterligningene får man da

$$\widetilde{P} = \phi^2 P + 1, P = (1-K)\widetilde{P} \quad \text{og} \quad K = \widetilde{P}(\widetilde{P}+\sigma^2)^{-1} \left[\Rightarrow 1-K = \frac{\sigma^2}{\widetilde{P}+\sigma^2}\right].$$

Vi må løse disse ved hensyn på P og K. Kombinerer de tre ligningene over og får:

$$\Rightarrow P = \frac{\sigma^2}{\widetilde{P}+\sigma^2}\left(\phi^2 P + 1\right)$$

$$\phi^2 P^2 + P(1+\sigma^2) = \sigma^2\phi^2 P + \sigma^2$$

$$\phi^2 P^2 + (1+\sigma^2-\sigma^2\phi^2)P - \sigma^2 = 0$$

$$P = \frac{-(1+\sigma^2-\sigma^2\phi^2) \pm \sqrt{(1+\sigma^2-\sigma^2\phi^2)+4\sigma^2\phi^2}}{2\phi^2}$$

Man må ha $P > 0$ slik at riktig løsning for P blir

$$P = \frac{1}{2}\left[\sigma^2 - \frac{1+\sigma^2}{\phi^2} + \sqrt{\left(\sigma^2 - \frac{1+\sigma^2}{\phi^2}\right) + 4\frac{\sigma^2}{\phi^2}}\right]$$

og

$$K = \frac{\phi^2 K + 1}{\phi^2 P + 1 + \sigma^2}$$

Innsatt $\phi = 0.9$ og $\sigma^2 = 0.5$ får man dermed $\underline{\underline{P = 3.043 \text{ og } K = 0.122}}$.

b)

$$x_t^t = x_t^{t-1} + K(y_t - x_t^{t-1}) = \phi x_{t-1}^{t-1} + K(y_t - \phi x_{t-1}^{t-1})$$

$$= Ky_t + (1-K)\phi x_{t-1}^{t-1} = Ky_t + (1-K)\phi[Ky_{t-1} + (1-K)\phi x_{t-2}^{t-2}]$$

$$= Ky_t + K(1-K)\phi y_{t-1} + (1-K)^2\phi^2 x_{t-2}^{t-2}$$

$$= \ldots = Ky_t + K(1-K)\phi y_{t-1} + K(1-K)^2\phi^2 y_{t-2} + K(1-K)^3\phi^3 y_{t-3} + \ldots$$

Dermed har vi at

$$\underline{\underline{a_j = K(K-1)^j\phi^j \quad \text{for} \quad j = 0, 1, 2, \ldots,}}$$

mens $a_j = 0$ for $j < 0$.

Innsatt $\phi = 0.9$ og $\sigma^2 = 0.5$ får man at $\underline{\underline{a_j = 0.1217 \cdot 0.7904^j}}$.

c)

$$A(\nu) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-2\pi i\nu j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} K((1-K)\phi)^j(\cos(2\pi\nu j) - i\sin(2\pi\nu j))$$

$$= K \cdot \frac{1-(1-K)\phi\cos(2\pi\nu)}{1+((1-K)\phi)^2 - 2(1-K)\phi\cos(2\pi\nu)} - iK \cdot \frac{(1-K)\phi\sin(2\pi\nu)}{1+((1-K)\phi)^2 - 2(1-K)\phi\cos(2\pi\nu)}$$

$$|A(\nu)|^2 = K^2 \frac{(1-(1-K)\phi\cos(2\pi\nu))^2 + ((1-K)\phi\sin(2\pi\nu))^2}{(1+((1-K)\phi)^2 - 2(1-K)\phi\cos(2\pi\nu))^2}$$

$$= \ldots = \underline{\underline{\frac{K^2}{1+((1-K)\phi)^2 - 2(1-K)\phi\cos(2\pi\nu)}}}.$$

Så må man til slutt skissere denne funksjonen for de oppgitte parameterverdier og gi noen fornuftige kommentarer.