



*Bokmål*

Faglig kontakt under eksamen: Øyvind Bakke  
Telefon: 73 59 81 26, 990 41 673

TMA4295 Statistisk inferens

Fredag 3. desember 2010 kl. 9–13

Hjelpemidler: Gult A5-ark med egne håndskrevne notater (stemplet av Institutt for matematiske fag), *Tabeller og formler i statistikk* (Tapir forlag), *Matematisk formelsamling* (K. Rottmann), kalkulator HP 30s eller Citizen SR-270X

Sensur: 24. desember 2010

I vurderingen teller hvert av de ti bokstavpunktene likt.

Alle svar skal begrunnes (f.eks. ved at mellomregning tas med eller ved henvisning til teori eller eksempler fra pensum).

I hele oppgavesettet gjelder det at  $X_1, X_2, \dots, X_n$  er uavhengige stokastiske variabler fra en fordeling som har sannsynlighetstetthet  $f$  gitt ved  $f(x) = \theta/(1+x)^{\theta+1}$  for  $x \geq 0$  og  $f(x) = 0$  ellers, der  $\theta > 1$  er en parameter.

### Oppgave 1

- a) Vis at momentestimatoren for  $\theta$  er  $\tilde{\theta} = 1 + \frac{1}{\bar{X}}$ .
- b) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren for  $\theta$  er  $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i)}$ .
- c) Vis at Cramér–Raos nedre skranke for variansen til en forventningsrett estimator for  $\theta$  er  $\theta^2/n$ .
- d) Vis at  $E\hat{\theta} = \frac{n\theta}{n-1}$  og  $\text{Var } \hat{\theta} = \frac{n^2\theta^2}{(n-2)(n-1)^2}$ .  
(Vink: Vis at  $\ln(1+X_i)$  er eksponentielt fordelt, slik at  $\hat{\theta} = n/Z$ , der  $Z$  er gammafordelt.)
- e) Vis at klassen av sannsynlighetstettheter  $f$  er en eksponentiell fordelingsklasse. Vis at  $\sum_{i=1}^n \ln(1 + X_i)$  er en komplett suffisient observator for  $\theta$ .
- f) Finn den unike beste (som har uniformt minimal varians) forventningsrette estimatoren for  $\theta$ .
- g) Hva er den asymptotisk relative effisiensen av  $\tilde{\theta}$  med hensyn på  $\hat{\theta}$  for  $\theta > 2$ ? Finn den numeriske verdien når  $\theta = 3$ .

### Oppgave 2

- a) Finn et tilnærmet  $1 - \alpha$ -konfidensintervall for  $\theta$  på grunnlag av sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren  $\hat{\theta}$ . Hva er den realiserede numeriske verdien av intervallet hvis  $n = 10$ ,  $\hat{\theta} = 3,23$  og  $\alpha = 0,05$ ?
- b) Finn også et eksakt  $1 - \alpha$ -konfidensintervall. (Vink:  $2n\theta/\hat{\theta} \sim \chi_{2n}^2$ .) Hva er den realiserede numeriske verdien av intervallet hvis  $n = 10$ ,  $\hat{\theta} = 3,23$  og  $\alpha = 0,05$ ?

### Oppgave 3

Finn testen med nivå  $\alpha$  som har uniformt størst styrke for å teste  $H_0: \theta \leq \theta_0$  mot  $H_1: \theta > \theta_0$ . For hvilke verdier av  $\hat{\theta}$  vil  $H_0$  forkastes hvis  $\theta_0 = 3$ ,  $n = 10$  og  $\alpha = 0,05$ ?