Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglærer:
Professor Henning Omre
Kontaktperson under eksamen:
Professor Bo Lindqvist
(97589418/735 93531)

Eksamen i TMA4295 STATISTISK INFERENS

Mandag 10.desember 2012
Tid: 09.00 - 13:00

Støtte:

Tabeller og formler i Statistikk, Tapir
Matematisk formelsamling, K.Rottmann
NTNU Calculator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Egenprodusert, håndskrevet, gul huskelapp - A5-format

Sensur: Onsdag 10.januar 2013

Oppgave 1

Bruk $X \to f(x|\sigma^2) = \mathrm{Norm}(0, \sigma^2)$, det vil si at X er Normalfordelt med gitt parameter $\mu = 0$ samt ukjent parameter σ^2. Betrakt et tilfeldig utvalg (random sample): $\mathbf{X} : X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif (iid) $\mathrm{Norm}(0, \sigma^2)$.

a) Utled et uttrykk for sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (MLE) for σ^2 - benevn estimatoren $\widehat{\sigma^2}$.

Demonstrer at estimatoren $\widehat{\sigma^2}$ er Gammafordelt, og utled uttrykk for fordelingsparametrene - se Tabeller og Formler i Statistikk..

Bruk resultatet over til å finne uttrykk for $\mathrm{E}(\widehat{\sigma^2})$ og $\mathrm{Var}(\widehat{\sigma^2})$.

b) Benytt Cramer-Raos ulikhet (Cramer-Rao Inequality) til å rettferdiggjøre at $\widehat{\sigma^2}$ er en uniformt minimum varians forventningsrett estimator (UMVUE) for σ^2.

c) Benytt et bayesiansk rammeverk med likelihood $[X|\sigma^2] \to f(x|\sigma^2) = \mathrm{Norm}(0, \sigma^2)$ samt aprioritetthet $\sigma^2 \to \pi(\sigma^2) = \mathrm{InvGam}(\alpha, \beta)$, det vil si at aprioritettheten er Invers-Gamma fordelt med gitte fordelingsparametre α og β - se Tabeller og Formler i Statistikk.

Utled et uttrykk for aposterioritettheten $[\sigma^2|\mathbf{X} = \mathbf{x}] \to \pi(\sigma^2|\mathbf{x})$.

Normal-/Invers-Gamma-fordelingene tilhører en spesiell klasse fordelinger med visse bayesianske karakteristika - hva heter denne klassen og hvilke karakteristika har den ?

d) Definer en kvadratisk tapsfunksjon (squared error loss function), $L(\sigma^2, \widetilde{\sigma^2})$, for estimator $\widetilde{\sigma^2}$ med hensyn til σ^2. Spesifiser den bayesianske estimatoren for σ^2 som minimerer den tilhørende risikofunksjonen (risk function) - benevn estimatoren $\widetilde{\sigma^2_B}$.

Utled et uttrykk for $\mathrm{E}(\widetilde{\sigma^2_B})$. Er estimatoren $\widetilde{\sigma^2_B}$ en forventningsrett (unbiased) estimator for σ^2 ? Begrunn svaret.

Hvilke krav stilles til en konsistent (consistent) estimator for σ^2 ? Tilfredsstiller estimatoren $\widetilde{\sigma^2_B}$ disse kravene ? Begrunn svaret.

e) La parameterverdiene i aprioritettheten $\pi(\sigma^2)$ være $\alpha = 4$ og $\beta = \frac{1}{6}$, samt la antallet observasjoner være $n = 20$.

De to estimatorene blir da:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma^2} &= \frac{1}{20}\Sigma_i X_i^2 \\ \widetilde{\sigma^2_B} &= \frac{1}{26}\Sigma_i X_i^2 + \frac{6}{13} \end{aligned}$$

Sammenlikn de to estimatorene ved hjelp av et minste kvadraters (MSE) kriterium. Tolk og diskuter resultatene.

Oppgave 2

Bruk sannsynlighetsfordelingen:

$$X \to f(x|\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^2} x \exp\{-\frac{x}{\beta}\} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

med ukjent fordelingsparameter $\beta > 0$. Merk at $\mathrm{E}(X) = 2\beta$ og at $\mathrm{Var}(X) = 2\beta^2$. Betrakt et tilfeldig utvalg: $\mathbf{X} : X_1, X_2, \ldots, X_n$ uif $f(x|\beta)$, med $n = 25$ og observasjoner hvor $\Sigma_i x_i = 15.0$ og $\Sigma_i x_i^2 = 27.0$.

a) Benytt Faktoriseringsteoremet (Factorization theorem) til å identifisere en suffisient observator (sufficient statistic) for β basert på utvalget.

Utled et uttrykk for sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (MLE) for $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = 2\beta^2$ - benevn denne estimatoren $\widehat{\sigma^2}$.

Regn ut tallverdi for estimatet for σ^2 basert på observasjonene.

b) Utled et uttrykk for et approksimert $(1-\alpha)$-konfidensintervall for σ^2 ved hjelp av den asymptotiske fordelingen til $\widehat{\sigma^2}$.

Regn ut tallverdier for intervallgrensene basert på observasjonene, samt $\alpha = 0.05$.

c) Betrakt nå den ukjente fordelingsparameteren β. Følgende hypotese fremmes:

$$H_0 : \beta = \beta_0 \text{ mot } H_1 : \beta \neq \beta_0$$

Bruk en level α score test (score test) til å bestemme et forkastningsområde for hypotesen H_0.

Utfør testen basert på observasjonene når $\beta_0 = \frac{1}{5}$ og $\alpha = 0.05$. Skal hypotesen H_0 forkastes ?