Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4295 Statistisk Inferens**

Faglig kontakt under eksamen: Professor Henning Omre
Tlf: 90937848

Eksamensdato: 14. Desember 2013
Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C.

Tabeller og Formler i Statistikk, Tapir
Matematisk formelsamling, K.Rottmann
NTNU godkjent kalkulator
Personlig, håndskrevet, gul huskelapp - A5-format

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 3
Antall sider vedlegg: 4

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

Bruk

$$X \to f(x|p) = \text{Geom}(p) = (1-p)^{x-1}p \; ; \; x = 1, 2, \dots \; ,$$

som medfører at X har en geometrisk sannsynlighetsfordeling med ukjent parameter $0 < p \leq 1$. Den tilhørende forventning er $\mu = \text{E}(X) = \frac{1}{p}$ og variansen er $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$. Betrakt et tilfeldig utvalg: $\mathbf{X}_n : X_1, X_2, \dots, X_n$ iid Geom(p).

a) Demonstrer at sannsynlighetsfordelingen $f(x|p)$ tilhører klassen av eksponensielle fordelinger.

Demonstrer at observatoren $\text{T}(\mathbf{X}_n) = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$ er en komplett, suffisient observator for parameteren p, ved å bruke egenskapene til klassen av eksponensielle fordelinger.

Demonstrer at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) til p er $\hat{p} = \frac{n}{\Sigma_{i=1}^{n} X_i} = [\bar{X}]^{-1}$.

b) Spesifiser SME'ene til μ og σ^2, samt betegn disse estimatorene som $\hat{\mu}$ og $\widehat{\sigma^2}$. Rettferdiggjør svarene.

Er SME'ene $\hat{p}$, $\hat{\mu}$ og $\widehat{\sigma^2}$ forventningsrette estimatorer ?

Betrakt kun en observasjon, $X \to \text{Geom}(p)$, og definer følgende estimator for parameteren p:

$$\tilde{p} = I[X = 1] = \begin{cases} 1 & \text{if } X = 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Demonstrer at $\tilde{p}$ er en forventningsrett estimator for parameteren p.

c) Utled et uttrykk for en forventningsrett estimator for parameteren p basert på hele det tilfeldige utvalget $\mathbf{X}_n$, ved å bruke Rao-Blackwell Teoremet.

Er denne forventningsrette estimatoren en uniform minste varians forventningsrett estimator (UMVFE) ? Rettferdiggjør svaret.

d) Demonstrer at SME'en $\hat{\mu}$ er en UMVFE for μ, ved å bruke Cramer-Rao Teoremet.

e) Spesifiser den asymptotiske fordelingen til estimatorene $\hat{p}$, $\hat{\mu}$ og $\widehat{\sigma^2}$. Rettferdiggjør svaret.

I praksis, hvordan kan en finne numeriske verdier til den asymptotiske variansene til $\hat{p}$, $\hat{\mu}$ og $\widehat{\sigma^2}$?

f) Betrakt hypotesen

$$H_0 : p = p_0 \text{ versus } H_1 : p \neq p_0$$

for en bestemt vedi $0 < p_0 \leq 1$.

Spesifiser forkastningsområdet for en nivå α asymptotisk sannsynlighetsrate test (SRT). Rettferdiggjør svaret.

Spesifiser det tilhørende asymptotiske $(1 - \alpha)$ konfidens området for parameteren p. Rettferdiggjør svaret.

Oppgave 2

Bruk

$$X \to f(x|\lambda) = \text{Pois}(\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \; ; \; x = 0, 1, \dots \; ,$$

som medfører at den tilfeldige variablen X har en poisson sannsynlighetsfordeling med ukjent parameter $\lambda > 0$. Se 'Tabeller og Formler i Statistikk'.

Betrakt et utvalg $\mathbf{X}$ som består av de uavhengige tilfeldige variablene:

$$\begin{array}{lcl} X_1 & \to & f(x|\lambda) \\ X_2 & \to & f(x|2\lambda) \\ X_3 & \to & f(x|3\lambda) \end{array}$$

Merk at utvalget er innsamlet med ulike parametere.

a) Identifiser en suffisient statistikk for λ basert på utvalget $\mathbf{X}$, ved å bruke Faktoriserings Theoremet.

Utled et uttrykk for sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ, betegn den $\hat{\lambda}$.

Er estimatoren $\hat{\lambda}$ en uniform minste varians forventningsrett estimator (UMVFE) for λ basert på utvalget $\mathbf{X}$? Rettferdiggjør svaret ved å bruke Cramer-Rao Teoremet.

Inferensen om parameteren λ skal nå gjøres i et bayesiansk rammeverk.

Tilegn en prior sannsynlighetsfordeling til parameteren λ:

$$\lambda \rightarrow \pi(\lambda|\alpha, \beta) = \text{Gamm}(\alpha, \beta) = [\Gamma(\alpha)]^{-1}\beta^{-\alpha}\lambda^{\alpha-1}e^{\frac{-\lambda}{\beta}} \ ; \ \lambda > 0 \ ,$$

som medfører at den tilfeldige variablen λ har en prior gamma sannsynlighetsfordeling med kjente hyper-parametere $\alpha, \beta > 0$. Se 'Tabeller og Formler i Statistikk'.

b) Betrakt utvalget $\mathbf{X} = \mathbf{x}$. Utled uttrykk for bayes estimatet samt den tilhørende estimeringsvariansen:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \text{E}(\lambda|\mathbf{x}) \\ \sigma^2_{\tilde{\lambda}} &= \text{Var}(\lambda|\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Diskuter prior fordelingen og uttrykkene over for følgende asymptotiske valg av hyper-parametere:

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow 0 \ , \ \beta \rightarrow \infty \quad &\text{and } \alpha\beta = \mu \\ \alpha \rightarrow \infty \ , \ \beta \rightarrow 0 \quad &\text{and } \alpha\beta = \mu \end{aligned}$$

med konstant $\mu > 0$. Gi kommentarer til svarene.

.

.

.

.