NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4295 Statistisk Inferens**

Faglig kontakt under eksamen: Professor Henning Omre

Tlf: 90937848

Eksamensdato: Desember 19.2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C.
Tabeller og Formler i Statistikk, Tapir
NTNU-godkjent kalkulator
Personlig, håndskrevet, gult 'jukse'-ark - A5-format

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 4

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Pareto-fordelingen

Betrakt Pareto-fordelingen som er i flittig bruk i økonomi og naturforvaltning. Sannsynlighetstetthetsfordelingen ('pdf') er

$$X \to f(x|\alpha,\beta) = \mathrm{Par}(\alpha,\beta) = \begin{cases} \beta\alpha^\beta x^{-(\beta+1)} & x \geq \alpha \\ 0 & x < \alpha \end{cases}$$

med modellparametrene $\alpha > 0$ og $\beta > 2$.

Den tilhørende kumulative fordelingsfunksjonen ('cdf') er,

$$X \to F(x|\alpha,\beta) = \mathrm{CPar}(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1-\alpha^\beta x^{-\beta} & x \geq \alpha \\ 0 & x < \alpha \end{cases}$$

Forventningen er $\mu = \mathrm{E}(X) = [\beta-1]^{-1}\beta\alpha$ og variansen er $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = [\beta-1]^{-2}[\beta-2]^{-1}\beta\alpha^2$.

Betrakt et tilfeldig utvalg: $\mathbf{X}_n : X_1, X_2, \ldots, X_n$ iid $\mathrm{Par}(\alpha,\beta)$.

Anta initielt, i Punkt a), b) og c), at begge parametrene (α,β) er ukjente.

a) Bruk 'the Factorization Theorem' for å identifisere suffisiente observatorer for parametrene (α,β).

b) Utled uttrykk for sannsynlighetsmaksimeringsestimatorene ('MLE') $(\hat{\alpha},\hat{\beta})$ for parametrene (α,β).

Spesifiser uttrykket for 'MLE'ene $(\hat{\mu},\hat{\sigma^2})$ for forventning μ og varians σ^2. Begrunn svaret.

c) Betrakt hypotesen

$$H_0 : \beta = \beta_0 \text{ versus } H_1 : \beta \neq \beta_0$$

for en bestemt verdi $\beta_0 > 2$.

Utled et uttrykk for forkastningsregionen R_c for en rimelighetsfraksjonstest for hypotesen om parameteren β.

Deretter, i Punkt d), e) og f), anta at parameteren α er en kjent verdi $\alpha_0 > 0$ mens parameteren $\beta > 2$ er ukjent.

En suffisient observator for parameter β er $\mathrm{T}_1(\mathbf{X}_n) = \Sigma_{i=1}^{n} \log X_i$.

d) Begrunn at den suffisiente observatoren $\mathrm{T}_1(\mathbf{X}_n)$ er en komplett, suffisient observator.

Spesifiser 'MLE' β^* for parameter β. Begrunn svaret.

e) Er estimatoren β^* en konsistent estimator for parameter β ? Begrunn svaret.

Utled uttrykket til den asymptotiske variansen for estimatoren β^*.

Er estimatoren β^* asymptotisk effisient for parameter β ? Begrunn svaret.

f) I kun dette punkt, skal parameter estimeringen gjøres i et Bayesiansk rammeverk. Tilegn en Gamma-fordeling til parameter β ,

$$\beta \to f(\beta|\lambda, \kappa) = \mathrm{Gam}(\lambda, \kappa) = \begin{cases} \lambda^{\kappa}[(\kappa-1)!]^{-1}\beta^{\kappa-1}\exp\{-\lambda\beta\} & \beta \geq 0 \\ 0 & \beta < 0 \end{cases}$$

for kjente hyperparametre, reell $\lambda > 0$ og heltall $\kappa > 0$.

Demonstrer at posteriori 'pdf' for β gitt realisasjonen av det tilfeldige utvalget $\mathbf{x}_n$ er en Gamma-fordeling, og utled uttrykket for aposteriori hyperparametrene.

Spesifiser uttrykket for Bayes estimatoren $\beta^+ = \mathrm{E}(\beta|\mathbf{X}_n)$ for parameter β.

Heretter, i Punkt g) og h), anta at parameter β er en kjent verdi $\beta_0 > 2$ mens parameter $\alpha > 0$ er ukjent.

En suffisient observator for parameter α er $\mathrm{T}_2(\mathbf{X}_n) = \mathrm{Min}\{X_1, \ldots, X_n\} = X_{(1)}$.

g) Betrakt den første observasjonen i det tilfeldige utvalget $X_1 \to \mathrm{Par}(\alpha, \beta_0)$ og definer følgende estimator for parameter α,

$$\alpha^+ = \beta_0^{-1}[\beta_0 - 1]X_1.$$

Demonstrer at estimatoren α^+ er forventningsrett for parameter α.

Bruk estimator α^+ og 'the Rao-Blackwell Theorem' til å utlede en forbedret forventningsrett estimator $\tilde{\alpha}$ for parameter α med mindre-eller-lik varians.

h) Betrakt 'MLE' for parameter α

$$\alpha^* = X_{(1)}.$$

Utled et uttrykk for 'pdf' for estimator α^* og bruk denne 'pdf'en til å demonstrere at α^* er en konsistent estimator for parameter α.

.

.

.

.

.