



## Oppgave 1

Pseudokode for å evaluere  $\hat{\theta}$ :

1. Generer uavhengige realisasjoner  $x_1, \dots, x_n \sim N(0, 1)$ .
2. For  $i = 1, \dots, n$  generer uavhengige realisasjoner  $y_i \sim \text{Poisson}(e^{x_i})$
3. Evaluer

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{y_i}.$$

Ved å benytte  $x$  som kontrollvariabel får man estimatoren

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\sqrt{y_i} + cx_i],$$

hvor man har benyttet at  $E[x_i] = 0$ . Størst variansreduksjon får man ved å velge

$$c = \frac{\text{Cov}[\sqrt{y_i}, x_i]}{\text{Var}[x_i]}.$$

$\text{Var}[x_i] = 1$ , mens  $\text{Cov}[\sqrt{y_i}, x_i]$  er ikke analytisk tilgjengelig og må dermed estimeres. Pseudokode for å evaluere  $\tilde{\theta}$  blir:

1. Generer uavhengige realisasjoner  $x_1, \dots, x_n \sim N(0, 1)$ .
2. For  $i = 1, \dots, n$  generer uavhengige realisasjoner  $y_i \sim \text{Poisson}(e^{x_i})$
3. Benytt at  $E[x_i] = 0$  og  $\text{Var}[x_i] = 1$  og estimer  $\text{Cov}[\sqrt{y_i}, x_i] = E[x_i \sqrt{y_i}]$  med

$$\hat{c} = \widehat{\text{Cov}}[\sqrt{y_i}, x_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sqrt{y_i}.$$

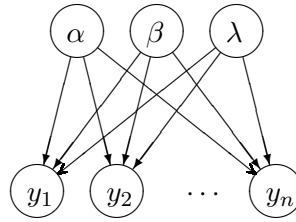
4. Evaluer

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\sqrt{y_i} + \hat{c}x_i].$$

## Oppgave 2

a)

Visualisering av modellen blir



Den fulle betingede fordelingen for  $\lambda$  blir

$$\begin{aligned}\pi(\lambda|\alpha, \beta, y_1, \dots, y_n) &\propto \pi(\alpha, \beta, \lambda, y_1, \dots, y_n) \propto \pi(\lambda) \prod_{i=1}^n \pi(y_i|\alpha, \beta, \lambda) \\ &= \frac{\lambda}{4} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\right\} \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda}{2} \exp\{-\lambda|y_i - (\alpha + \beta(x_i - \bar{x}))|\}\right] \\ &\propto \lambda^{n+1} \exp\left\{-\lambda\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n |y_i - (\alpha + \beta(x_i - \bar{x}))|\right)\right\} \\ &\propto \lambda^{n+1} \exp\left\{-\lambda\left(\frac{1}{2} + Q(\alpha, \beta, y_1, \dots, y_n)\right)\right\},\end{aligned}$$

med

$$Q(\alpha, \beta, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n |y_i - (\alpha + \beta(x_i - \bar{x}))|.$$

b)

Fordelingen til  $v \sim \chi_\nu^2$  er

$$f_v(v) \propto v^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\frac{v}{2}\right\}.$$

Transformasjonsformelen gir da at  $\lambda = v \cdot r$  er ( $\lambda = v \cdot r \Leftrightarrow v = \lambda/r$ )

$$f_\lambda(\lambda) = f_v\left(\frac{\lambda}{r}\right) \left|\frac{1}{r}\right| \propto \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2r}\right\} \propto \lambda^{\frac{\nu}{2}-1} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2r}\right\}.$$

Den simulerte  $\lambda$  vil dermed få den ønskede fordeling ved å velge

$$\frac{\nu}{2} - 1 = n + 1 \Rightarrow \nu = 2n + 4$$

og

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{2} + Q(\alpha, \beta, y_1, \dots, y_n) \Rightarrow r = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}Q(\alpha, \beta, y_1, \dots, y_n)}$$

c)

Her finnes det selvfølgelig mange riktige svar. Mest naturlig er det kanskje å benytte en single-site-Metropolis–Hastings-algoritme. For eksempel ved følgende pseudokode:

1. Initialiser  $\alpha^0, \beta^0, \lambda^0$  med lovlige verdier.
2. For  $k = 1, \dots, K$ 
  - (a) Trekk  $\lambda^k \sim \pi(\lambda | \alpha^{k-1}, \beta^{k-1}, y_1, \dots, y_n)$  ved algoritma fra forrige punkt. [*Aksept-sannsynligheten her er lik 1 siden dette er et gibbs-steg*].
  - (b) Foreslå  $\tilde{\alpha}^k \sim N(\alpha^{k-1}, \sigma_\alpha^2)$  [*for en passende verdi  $\sigma_\alpha^2$* ].
  - (c) Trekk  $u_\alpha^k \sim \text{Unif}[0, 1]$
  - (d) Hvis  $u_\alpha^k \leq a_\alpha(\tilde{\alpha}^k | \alpha^{k-1}, \beta^{k-1}, \lambda^k)$  sett  $\alpha^k = \tilde{\alpha}^k$ , ellers sett  $\alpha^k = \alpha^{k-1}$ . [*Uttrykk for aksept-sannsynligheten er regnet ut under*]
  - (e) Foreslå  $\tilde{\beta}^k \sim N(\beta^{k-1}, \sigma_\beta^2)$  [*for en passende verdi  $\sigma_\beta^2$* ].
  - (f) Trekk  $u_\beta^k \sim \text{Unif}[0, 1]$
  - (g) Hvis  $u_\beta^k \leq a_\beta(\tilde{\beta}^k | \beta^{k-1}, \alpha^k, \lambda^k)$  sett  $\beta^k = \tilde{\beta}^k$ , ellers sett  $\beta^k = \beta^{k-1}$ . [*Uttrykk for aksept-sannsynligheten er regnet ut under*]

Forslagene for  $\alpha$  og  $\beta$  benyttet her er begge metropolisforslag slik at forslagssannsynlighetene kan forkortes i uttrykkene for aksept-sannsynlighetene. Innsetting i de generelle uttrykket for aksept-sannsynligheten i en metropolisalgoritme gir (etter litt regning, og denne mellomregningen må selvfølgelig være med i en besvarelse selv om den ikke er gitt her)

$$a_\alpha(\tilde{\alpha} | \alpha, \beta, \lambda) = \min \left\{ 1, \exp \left\{ \frac{\alpha^2 - \tilde{\alpha}^2}{200} + \lambda (Q(\alpha, \beta, y_1, \dots, y_n) - Q(\tilde{\alpha}, \beta, y_1, \dots, y_n)) \right\} \right\}$$

og

$$a_\beta(\tilde{\beta} | \beta, \alpha, \lambda) = \min \left\{ 1, \exp \left\{ \frac{\beta^2 - \tilde{\beta}^2}{200} + \lambda (Q(\alpha, \beta, y_1, \dots, y_n) - Q(\alpha, \tilde{\beta}, y_1, \dots, y_n)) \right\} \right\}.$$

d)

Antar en burn-in på  $R$  iterasjoner.

1.  $P(\beta > 0 | y_1, \dots, y_n)$  kan estimeres ved

$$\hat{P}(\beta > 0 | y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{K - R} \sum_{k=R+1}^K I(\beta^k > 0).$$

2. Ved å benytte setningen om dobbeltforventning og at  $y_0$  er betinget uavhengig av  $y_1, \dots, y_n$  når  $\alpha, \beta$  og  $\lambda$  er gitt får vi

$$\begin{aligned} E[y_0|y_1, \dots, y_n] &= E[E[y_0|y_1, \dots, y_n, \alpha, \beta, \lambda]|y_1, \dots, y_n] \\ &= E[E[y_0|\alpha, \beta, \lambda]|y_1, \dots, y_n] = E[\alpha + \beta(x_0 - \bar{x})|y_1, \dots, y_n]. \end{aligned}$$

Man kan dermed estimere  $E[y_0|y_1, \dots, y_n]$  ved

$$\hat{E}[y_0|y_1, \dots, y_n] = \frac{1}{K-R} \sum_{k=R+1}^K (\alpha^k + \beta^k(x_0 - \bar{x})).$$

Alternativt kan man for hver  $k = R+1, \dots, K$  simulere  $y_0^k$  (uavhengig av hverandre) ved

$$y_0^k \sim \pi(y_0|x_0, \alpha^k, \beta^k, \lambda^k),$$

dvs. fra en dobbel eksponensialfordeling, og estimere  $E[y_0|y_1, \dots, y_n]$  ved

$$\hat{E}[y_0|y_1, \dots, y_n] = \frac{1}{K-R} \sum_{k=R+1}^K y_0^k,$$

men denne siste estimatoren vil ha større Monte-Carlo-varians enn den første.

3. Her kan man benytte setningen om total sannsynlighet og at  $y_0$  er betinget uavhengig av  $y_1, \dots, y_n$  når  $\alpha, \beta$  og  $\lambda$  er gitt og få

$$\begin{aligned} \pi(y_0|y_1, \dots, y_n) &= \int \int \int \pi(y_0|\alpha, \beta, \lambda, y_1, \dots, y_n) \pi(\alpha, \beta, \lambda|y_1, \dots, y_n) d\alpha d\beta d\lambda \\ &= \int \int \int \pi(y_0|\alpha, \beta, \lambda) \pi(\alpha, \beta, \lambda|y_1, \dots, y_n) d\alpha d\beta d\lambda. \end{aligned}$$

Man kan dermed estimere  $\pi(y_0|y_1, \dots, y_n)$  ved

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(y_0|y_1, \dots, y_n) &= \frac{1}{K-R} \sum_{k=R+1}^K \pi(y_0|\alpha^k, \beta^k, \lambda^k) \\ &= \frac{1}{K-R} \sum_{k=R+1}^K \frac{\lambda^k}{2} \exp \left\{ -\lambda^k |y_0 - (\alpha^k + \beta^k(x_0 - \bar{x}))| \right\}. \end{aligned}$$

Alternativt kan man igjen simulere  $y_0^{R+1}, \dots, y_0^K$  som i punkt 2 over og benytte disse i tetthetsestimering, men dette vil igjen gi større Monte-Carlo-varians enn den første metoden.

## Oppgave 3

a)

Parametrisk bootstrapping:

1. Beregn  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  og  $\hat{\lambda}$  fra de observerte data  $y_1, \dots, y_n$ .
2. For  $i = 1, \dots, n$ 
  - (a) sett  $x_i^* = x_i$
  - (b) simuler

$$\varepsilon_i^* \sim \frac{\hat{\lambda}}{2} \exp \left\{ -\hat{\lambda} |\varepsilon_i^*| \right\}$$

- (c) sett  $y_i^* = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_i^*$ .

Bootstrapping av (estimerte) residualer:

1. Beregn  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  og  $\hat{\lambda}$  fra de observerte data  $y_1, \dots, y_n$ .
2. For  $i = 1, \dots, n$  beregn estimerte residualer

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_i - \bar{x})).$$

3. For  $i = 1, \dots, n$ 
  - (a) sett  $x_i^* = x_i$ .
  - (b) trekk  $k \sim \text{Uniform}(1, \dots, n)$  og sett  $y_i^* = \hat{\alpha} + \hat{\beta}(x_i - \bar{x}) + \hat{\varepsilon}_k$ .

Bootstrapping av observasjonspar:

1. For  $i = 1, \dots, n$ 
  - (a) trekk  $k \sim \text{Uniform}(1, \dots, n)$ .
  - (b) sett  $x_i^* = x_k$  og  $y_i^* = y_k$ .

Dersom man er sikker på at den parametriske modellen er korrekt er parametrisk bootstrapping det beste. Dersom man ikke stoler på den parametriske modellen og også er usikker på om sannsynlighetsfordelingen for residualene er uavhengig av  $x$  bør man benytte bootstrapping av observasjonspar. Dersom verdien til  $x_i$ 'ene er valgt (og dermed ikke bør betraktes som stokastiske) bør man benytte parametrisk bootstrapping eller bootstrapping av estimerte residualer (slik at verdiene til  $x_i$ 'ene forblir uforandret).

b)

1. Estimere  $SD(\hat{\beta})$ :

- (a) For  $b = 1, \dots, B$  beregn  $\hat{\alpha}^{*(b)}$  og  $\hat{\beta}^{*(b)}$  med utgangspunkt i  $\{(x_i^{*(b)}, y_i^{*(b)})\}_{i=1}^n$ .  
 (b) Estimer  $SD(\hat{\beta})$  ved

$$\widehat{SD}(\hat{\beta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B \left( \hat{\beta}^{*(b)} - \hat{\beta}^{*(\cdot)} \right)^2},$$

der

$$\hat{\beta}^{*(\cdot)} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{\beta}^{*(b)}.$$

2. Percentilintervall for  $E(y_0) = \alpha + \beta(x_0 - \bar{x})$ :

- (a) For  $b = 1, \dots, B$  beregn  $\hat{\alpha}^{*(b)}$  og  $\hat{\beta}^{*(b)}$  med utgangspunkt i  $\{(x_i^{*(b)}, y_i^{*(b)})\}_{i=1}^n$ .  
 (b) For  $b = 1, \dots, B$  beregn

$$\hat{\mu}^{*(b)} = \hat{\alpha}^{*(b)} + \hat{\beta}^{*(b)}(x_0 - \bar{x}^{*(b)})$$

der

$$\bar{x}^{*(b)} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i^{*(b)}.$$

- (c) Et  $(1-a) \cdot 100\%$ -konfidensintervall er da  $[\hat{\mu}_L^*, \hat{\mu}_U^*]$  der  $\hat{\mu}_L^*$  og  $\hat{\mu}_U^*$  er henholdsvis den  $Ba/2$ 'nte minste verdien og den  $Ba/2$ 'nte største verdien av  $\hat{\mu}^{*(1)}, \dots, \hat{\mu}^{*(B)}$ .

c)

Et prediksjonsintervall kan estimeres ved parametrisk bootstrapping eller ved å resample estimerte residualer. Å resample observasjonspaar fører her ikke frem fordi man da ikke er i stand til å simulere  $y_0$ -verdier.

Algoritme for danne bootstrapp-prediksjonsintervall:

1. Generer bootstrapputvalg  $\{(x_i^{*(b)}, y_i^{*(b)})\}_{i=1}^n, b = 1, \dots, B$ .
2. For  $b = 1, \dots, B$  beregn  $\hat{\alpha}^{*(b)}$  og  $\hat{\beta}^{*(b)}$  med utgangspunkt i  $\{(x_i^{*(b)}, y_i^{*(b)})\}_{i=1}^n$ .

3. For  $b = 1, \dots, B$ , generer  $\varepsilon_0^{*(b)}$  uavhengige av hverandre. Hvis parametrisk bootstrapping benyttes, generer  $\varepsilon_0^{*(b)}$  fra fordeling med tetthet

$$\varepsilon_0^{*(b)} \sim \frac{\hat{\lambda}}{2} \exp \left\{ -\hat{\lambda} |\varepsilon_0^{*(b)}| \right\}.$$

Hvis resampling av estimerte residualer benyttes, trekk  $\varepsilon_0^{*(b)}$  tilfeldig fra  $\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_n$ .

4. For  $b = 1, \dots, B$  beregn

$$y_0^{*(b)} = \hat{\alpha}^{*(b)} + \hat{\beta}^{*(b)}(x_i - \bar{x}) + \varepsilon_0^{*(b)}.$$

5. Et  $(1 - a) \cdot 100\%$ -prediksjonsintervall for  $y_0$  er da  $[y_{0,L}^*, y_{0,U}^*]$  der  $y_{0,L}^*$  og  $y_{0,U}^*$  er henholdsvis den  $Ba/2$ 'nte minste verdien og den  $Ba/2$ 'nte største verdien av  $y_0^{*(1)}, \dots, y_0^{*(B)}$ .