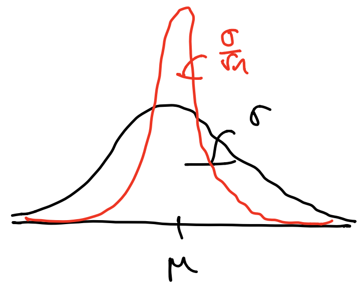
ST1201, 09.10.2018

HYPOTESETESTING

Blodtrykkseksempel:

$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 10^2)$



Tilfeldig utvalg, $n = 100$ obs; $X_1, \dots, X_n$

$$\underset{\text{punktest.}}{\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} = \frac{100}{100}\right) = N(\mu, 1)$$

95 % KI: $\left[\bar{x} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [\bar{x} \pm 1.96]$

Observerer $\bar{x} = 122 \rightarrow [120.04, 123.96]$

Er det $\overbrace{\text{gjsn}}^{\mu}$ blodtrykket større enn 120?

$H_0: \mu = 120$ vs. $H_1: \mu > 120$

Type I feil = Forkaste H_0 når H_0 er sann.

Her: si at forv. blodtrykket er > 120 når sannheten er at det er lik 120

Vi ønsker at $\underbrace{P(\text{Type I feil})}_{\alpha}$ er lav: $\leq$ 5%, 1%, 10%

P-verdi: P(det vi har obs eller noe mer ekstremt gitt at H_0 er sann)

$$P(\bar{X} \geq \bar{x} \mid H_0 \text{ sann}) = P(\bar{X} \geq 122) = P\left(\frac{\bar{X} - 120}{1} \geq \frac{122 - 120}{1}\right)$$

$\bar{X} \sim N(\mu = 120, 1)$, $\bar{x} = 122$

$$= \Phi(2) = 0.0228$$

Uformelt: p-verdien er sanns. for at vår testobs $\bar{X}$ er observert til å være ≥ 122 når sannheten er at $\mu = 120$.

For $\underbrace{\text{små p-verdier}}_{\substack{\text{mindre enn valgt} \\ \text{signifikansnivå}}}$ tror vi at H_0 er falsk og forkaster H_0.

Dvs. vi ser på p-verdien som en sannsynlighet

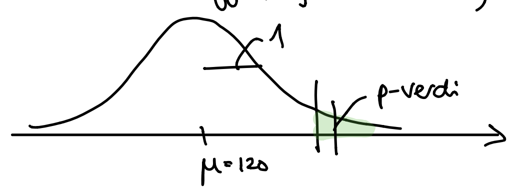
Her: p-verdi $< 0.05 \Rightarrow$ forkast H_0 og anta at blodtrykk i pop. er høyere enn 120.

TEST AV EN HYPOTESE

$H_0: \mu = 120$ vs $H_1: \mu > 120$

og vi regnet ut p-verdi fra et utvalg

$\rightarrow P(\bar{X} > \text{obs. gjsn} \mid H_0 \text{ sann})$



Spm: Hva skjer hvis vi samler inn data fra $n=100$ nye personer fra populasjonen?

Vi observerer en ny $\bar{x}$ og regner ut en ny p-verdi

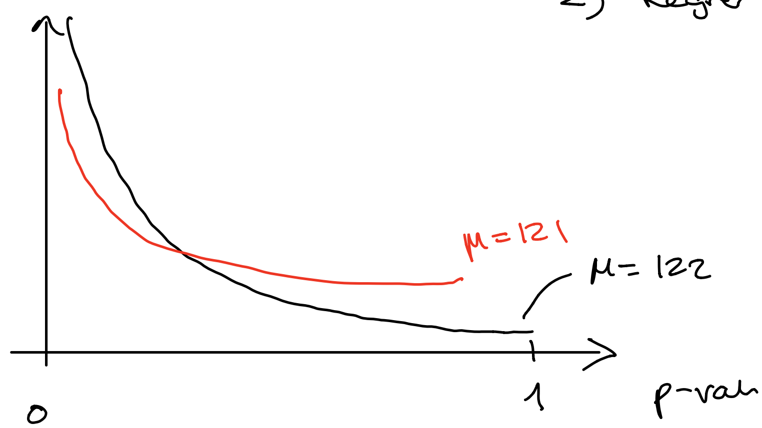
P-verdien er en funksjon av stokastiske variabler og derfor selv en stok. var. $\Rightarrow$ P-verdien har dermed en fordeling!

Hvilken?

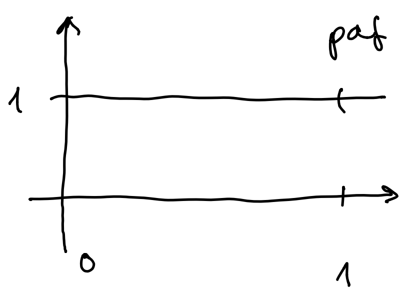
H_1 senn og $\mu = 122$ N(122,1)

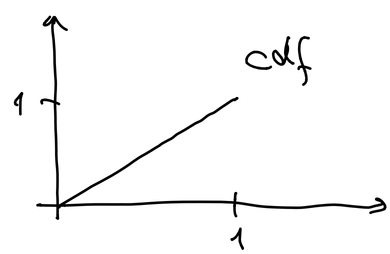
1) Trekker tilf. utvalg av n=100 obs. fra H_1

2) Regner ut $\bar{x}$ og p-verdi



Når H_0 er senn → hva er fordelingen til p-verdiene da?
⇓
uniform





Bevis: Anta at vi har testobservator T og at store verdier av T fører til forkastning av H_0.

Når $T = t$ (verdi; sv) regner vi ut en verdi w for p-verdien W.

Det betyr at $P(T \geq t) = P(W \leq w)$

høy test obs   lav p-verdi

Men, $P(T \geq t) = w$. kombinerer disse to

$P(W \leq w) = P(T \geq t) = w$ når H_0 er sann.

En SV med cdf $P(W \leq w) = w$ er uniformt fordelt

Qed

Dette gjelder når p-verdien er kontinuerlig og eksakt.

Multippel testing

har m hypoteser som skal testes

R av disse blir forkastet

p-verdi $< \alpha_{Loc}$

	Ikke forkast H_0	Forkast H_0	Total	
H_0 sann	Correct U	falsk positiv Type I V	m_0	sanne hypoteser
H_0 falsk	Type II feil T	Correct S	$m - m_0$	
		R	m	

Vi kjenner kun m og R.

Generalisering av type I feil

$$\text{FWER} = P(V > 0) = P(V \geq 1)$$

family-wise error rate

en eller flere falske funn

false news

Vi vil kontrollere FWER på nivå $\alpha \leftarrow 0.05$

Det betyr at vi må finne α_{loc} slik at

$$P(V > 0) \leq \underset{0.05}{\alpha}$$

p-verdi til hyp nr i

La $R_i = \{\text{forkast } H_0 \text{ nr } i, \text{ i.e. } p_i \leq \alpha_{loc}\}$

$\bar{R}_i = \{\text{ikke forkast } H_0 \text{ nr } i, \quad p_i > \alpha_{loc}\}$

$$P(V > 0) = 1 - P(V = 0) = 1 - \underbrace{P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_m)}$$

I utregningen her antar vi at alle H_0 er sanne "komplett H_0"

trenger simultanford til testobs $T_1, \dots, T_m$ (evt til p-verdier)

integrere!

Bonferroni's metode : Anta at alle H_0 er sanne

$$P(V > 0) = P(R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \dots \cup R_m)$$

$$\leq P(R_1) + P(R_2) + \dots + P(R_m)$$

$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ Boole's ulikhet

$$\underset{\text{FWER}}{\underset{\|}{P(V>0)}} \leq \underbrace{P(\text{forkaste } H_0 \text{ nr } 1)}_{P(P_1 \leq \alpha_{loc})} + \dots + P(\text{forkaste } H_0 \text{ nr } m)$$

$$\dots$$

$$\underset{\alpha}{\underset{\|}{P(V>0)}} \leq \alpha_{loc} + \alpha_{loc} + \dots + \alpha_{loc} = m \cdot \alpha_{loc}$$

Vi velger $\underline{\underline{\alpha_{loc} = \frac{\alpha}{m}}}$