Numerisk lineær algebra: Del 2.

Grunnlagsteori i lineær algebra.

Def: Et (reelt) vektorrom består av en mengde V, og to operasjoner: addisjon og skalar multiplikasjon slik at

$$x + y \in V \qquad \forall x, y \in V$$
$$\alpha \cdot x \in V \quad , \forall x \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \qquad (\alpha \text{ kalles en skalar})$$

(Se. feks. forelesningsnotatene i Matematikk 3 for en fullstendig definisjon).

Eks:
a) $V = \mathbb{R}^n$ (n-dimensjonale vektorer)
b) $V = \mathbb{R}^{n\times m}$ ($n\times m$ matriser)
c) $V = \mathbb{P}_n$ (polynomer av grad $\leq n$)
d) $V = C[a,b]$ (kontinuerlige funksjoner på $[a,b]$)

Et sett med vektorer $\{v_i\}_{i=1}^{q} \subset V$ er lineært uavhengige (lu) hvis

$$\sum_{i=1}^{q} a_i v_i = 0 \iff a_i = 0, \ i = 1, \cdots, q. \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

med andre ord: En vektor kan ikke uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre.

Dersom det fins et sett av lineært uavhengige vektorer $\{v_i\}_{i=1}^{n}$, s.a. alle $w \in V$ kan uttrykkes på formen

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad (a_i \in \mathbb{R})$$

så sier vi at $\{v_i\}_{i=1}^{n}$ er en basis for V, og V er n-dimensjonalt.

Notasjon

$$V = \operatorname{span}\{v_i\}_{i=1}^{n}$$

Eks: $V = \mathbb{R}^3 = \operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^{3}$, $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Normerte rom:

En **norm** kan tenkes på som størrelsen av en vektor $v \in V$.
Det er en funksjon $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ som for alle skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ og $x, y \in V$ oppfyller

i) $\|x\| \geq 0$, og $\|x\| = 0 \iff x = 0$
ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Trekant ulikhet.

Eks: $V = C[a,b]$. $f \in C[a,b]$: $\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2 dx\right)^{1/2}$

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

- Et vektorrom utstyrt med en norm kalles et normert rom, skrives ofte som $(V, \|\cdot\|)$

Men, i denne delen av kurset er vi bare interessert i $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Normer i $\mathbb{R}^n$:

$\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$

Euclidsk norm: $\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$

Maksimums normen: $\|\vec{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$

Summasjons norm: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Vil disse oppfylle de tre kravene for en norm?
La oss se på den euklidske normen.

i) $\|\vec{x}\|_2 \geq 0$ er opplagt.

$$\|\vec{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff x_i = 0,\ i = 1, \dots, n \iff \vec{x} = \vec{0}$$

ii) $\|\alpha \cdot \vec{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i)^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \alpha^2 \cdot \|x\|_2^2$. Ta kvadratroten på begge sider.

iii) $\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+2x_iy_i+y_i^2)$

$$= \|x\|^2 + 2\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{x^T y} + \|y\|^2$$

Vi trenger Cauchy-Schwartz ulikhet (CS)

$$|x^T y| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Bevis: Dette er åpenbart riktig hvis enten $\vec{x}$ eller $\vec{y}$ er $\vec{0}$.
Anta at $x \neq 0$ og $y \neq 0$. La $\alpha \in \mathbb{R}$, (foreløbig fritt valg).

$$0 \le \|\vec{x} - \alpha\cdot\vec{y}\|_2^2 = \|\vec{x}\|_2^2 - 2\alpha\,\vec{x}^T\cdot\vec{y} + \alpha^2\cdot\|\vec{y}\|^2$$

$$\Rightarrow 2\alpha\,\vec{x}^T\vec{y} \le \|\vec{x}\|^2 + \alpha^2\|\vec{y}\|^2$$

Velg $\alpha = \frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{y}\|_2}$, slik at ulikheten over blir

$$2\cdot\frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{y}\|_2}\cdot\vec{x}^T\vec{y} \le 2\|x\|^2 \Rightarrow \vec{x}^T\vec{y} \le \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|$$

Gjenta argumentet med $\alpha = -\frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{y}\|_2}$, som viser at $-x^T y \le \|x\|_2\cdot\|\vec{y}\|_2$
og CS-ulikheten er vist.

Tilbake til iii) Ved bruk CS ser vi at

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|_2^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}^T\vec{y} + \|\vec{y}\|^2 \le \|\vec{x}\|_2^2 + 2\|\vec{x}\|_2\|\vec{y}\|_2 + \|\vec{y}\|_2^2$$

$$= (\|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2)^2$$

Ta kvadratroten på begge sider,
og trekantulikheten er bevist.

Så: $\|\vec{x}\|_2 = (\sum x_i^2)^{1/2} = \sqrt{\vec{x}^T\vec{x}}$ er en norm.

Oppgave: Vis selv at de to andre, $\|\vec{x}\|_1$ og $\|\vec{x}\|_\infty$ oppfyller kriteriene for en norm.

Matrisenormer.

Vi kan selvsagt se på $n \times n$-matriser bare som elementer i $\mathbb{R}^{n \times n}$, og definere matriser deretter. Men det er ofte vel så nyttig å tenke på en $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ som en lineær operator $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definert ved

$$\vec{y} = A\vec{x}.$$

En matrisenorm (eller operator norm) oppfyller betingelsene

i) $\|A\| \geq 0, \quad \|A\| = 0 \iff A = 0$

ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\| \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iv) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

for alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

For alle vektornormene i $\mathbb{R}^n$ fins en naturlig (indusert) matrisenorm:

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|x\|} = \max_{\|\vec{x}\| = 1} \|A\vec{x}\|$$

Det innebærer:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

og, det fins minst en $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, s.a. $\|Ax\| = \|A\|$.

Oppgave: Vis at naturlige matrisenormer oppfyller betingelsene i) - iv).

Eksempel:

Den naturlige matrisenormen for $\|\vec{x}\|_\infty$ er $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
Hvorfor?

La $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = 1$. Dvs. $|x_i| \leq 1$, $i = 1, \cdots, n$
og det fins minst en q s.a. $|x_q| = 1$.

$$\|A\vec{x}\|_\infty = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_\infty$$

Det neste er å finne en $\vec{x}$, $\|x\|_\infty = 1$ s.a. $\|A\vec{x}\|_\infty = \|A\|_\infty \cdot \|x\|_\infty = \|A\|_\infty$

Velg p slik at $\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_\infty$.

La $\vec{x}$ være gitt ved

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis } a_{pj} \geq 0 \\ -1 & \text{hvis } a_{pj} < 0 \end{cases}$$

dvs $a_{pj} x_j \geq 0$, og $a_{pj} x_j = |a_{pj}|$

$$\|A\vec{x}\|_\infty = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \|A\|_\infty.$$

Det kan også vises at

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \left(\max_i |\lambda_i|\right)^{1/2}, \qquad \{\lambda_i\} \text{ egenverdiene til } A^T A.$$

Feilanalyse:

Vi skal løse ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$, A inverterbar.
Anta at det er små feil (pertubasjoner) i dataene, dvs. i A og b. Hvordan påvirker det løsningen $\vec{x}$?

La $\tilde{b} = \vec{b} + \delta\vec{b}$, $\tilde{x} = A^{-1}\tilde{b}$, hva kan vi si om feilen $\delta\vec{x} = \vec{x} - \tilde{x}$?

$$\|\delta\vec{x}\| = \|\vec{x} - \tilde{x}\| = \|A^{-1}(b - \tilde{b})\| = \|A^{-1}\cdot\delta\vec{b}\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta\vec{b}\|$$

La oss nå se på den relative feilen $\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$. Bruk $\|A\vec{x}\| = \|\vec{b}\|$

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{x}\|} = \|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}\cdot\frac{\|\vec{b}\|}{\|\vec{x}\|} = \|A^{-1}\|\cdot\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|\vec{b}\|}$$

så, siden $\|A\vec{x}\| \le \|A\|\cdot\|x\|$ er

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} = \kappa(A)\cdot\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Kondisjonstallet til A: $\kappa(A) = \|A^{-1}\|\cdot\|A\|$.

NB! $\kappa(A) \geq 1$ (hvorfor?)

$\kappa(A) \gtrsim 1$: A er velkondisjonert. Små feil i $\vec{b}$ gir små feil i løsningen $\vec{x}$.

$\kappa(A) \gg 1$: A er dårlig kondisjonert. Små feil i $\vec{b}$ kan føre til store feil i A.

Tilsvarende: Hvis vi løser $(A + \delta A)\cdot\tilde{x} = \vec{b} + \delta\vec{b}$
og $\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\| < 1$ så er

$$\frac{\|\delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\cdot\left(\frac{\|\delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$