## Egenverdier og egenvektorer

Gitt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Egenverdier: $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ : $\lambda$: egenverdi $(\lambda \in \mathbb{C})$
$\vec{v}$: egenvektor $(\vec{v} \in \mathbb{C}^n)$

Spektret til $A$: $\sigma(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$

Spektralradien til $A$: $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$

Hvordan finne $\lambda$?

Klassisk: $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \in \mathbb{P}_n$
løs $p(\lambda) = 0$.
} Ikke anvendelig i praksis

## Lokalisering av egenverdier:

Gershgorin disk:

$$R_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

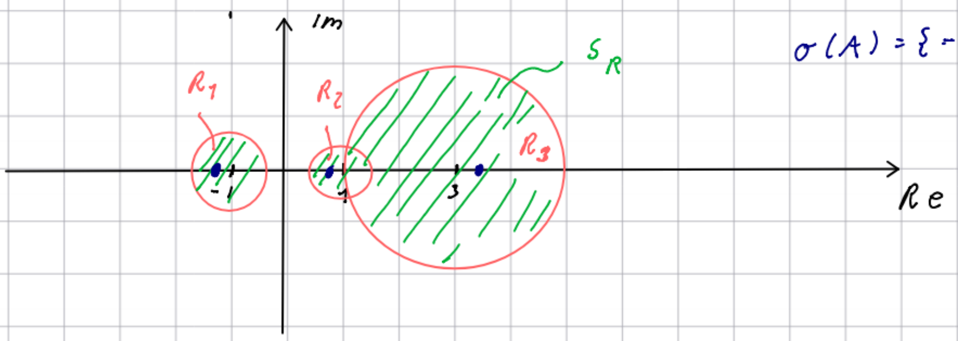
La $S_R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$

**Gershgorins sirkelteorem:**

$$\boxed{\sigma(A) \subseteq S_R}$$

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.75 \\ 0.25 & 1 & 0.25 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$




$\sigma(A) = \{-1.16, 0.86, 3.3\}$

Bevis: La $\lambda \in \sigma(A)$ (en av egenverdiene) og $v$ den korresponderende egenvektor. Da har vi:

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i, \quad i = 1, \dots, n$$

La $\|v\|_\infty = \max_i |v_i| = 1$. Det betyr at

$$|v_i| \leq 1, \; i = 1, \dots, n, \text{ og det fins en } p \text{ s.a. } |v_p| = 1.$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot v_p = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} v_j$$

$$\Rightarrow (\lambda - a_{pp}) v_p = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} a_{pj} v_j$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{pp}| \cdot \underbrace{|v_p|}_{=1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}| \cdot \underbrace{|v_j|}_{\leq 1}$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{pp}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} |a_{pj}|$$

$$\Rightarrow \lambda \in R_p \subseteq S_R.$$

Tilsvarende: La

$$C_j = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \}, \quad S_C = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

Da er $\sigma(A) \subseteq S_C$.

så

$$\boxed{\sigma(A) \subseteq S_C \cap S_R}$$

Korrolær:

Hvis $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og strengt diagonaldominant, dvs. hvis

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \; i = 1, \cdots, n \qquad \text{(SDD)}$$

så er $A$ inverterbar (ingen egenverdier $= 0$).

Def. En matrise er symmetrisk positiv definit (SPD) hvis

$$A = A^T \quad \text{og} \quad \vec{x}^T A \vec{x} > 0 \; , \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \; \vec{x} \neq 0.$$

Teorem: En symmetrisk matrise $A$ er SPD hvis og bare hvis $\lambda_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$.

Korrolær: Hvis $A = A^T$, SDD og $a_{ii} > 0$, $i = 1, \cdots, n$ så er $A$ SPD.

Vi kommer til å bruke dette i forelesningen fredag etter påske!