Klassiske iterative metoder for lineære ligningssystemer

Gitt

(1) $\quad A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inverterbar, $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

og la $\vec{x}^*$ være den eksakte løsningen av (1).

Antagelse: $a_{ii} \neq 0$, $i = 0, \cdots, n$.

Ligning (1) kan skrives på element form som

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , \; i = 1, \cdots, n.$$

Løs hver ligning mhp. x_i:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j \Big).$$

Jacobi-iterasjoner: Gitt $\vec{x}^{(0)}$.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big) \;, \; i = 1, \cdots, n$$

Vi kan forbedre denne algoritmen ved hele tiden bruke de mest oppdaterte verdiene av x_i:

Gauss-Seidel iterasjoner:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big).$$

A er strengt diagonaldominant hvis

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Strengt diagonal dominante matriser er alltid inverterbare.

Teorem 1: For Jacobi og Gauss-Seidel gjelder

A strengt diagonal dominant $\Rightarrow \vec{x}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}^*$, $\forall \vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Bevis (Jacobi): La $e^{(k)} = \vec{x}^* - x^{(k)}$. Vi har

$$x_i^* = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^*\Big)$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big)$$

Ta differansen mellom disse

gir

$$e_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij} e_j^{(k)}, \quad i = 1, \cdots, n$$

$\Downarrow$ Triangelulikheten

$$|e_i^{(k+1)}| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\,|e_j^{(k)}|$$

$$\|e^{(k)}\|_\infty = \max_i |e_i^{(k)}|$$

$$\leq \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \cdot \|e^{(k)}\|_\infty$$

$$= L \cdot \|e^{(k)}\|_\infty, \quad L = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Siden dette holder for alle $i = 1, \cdots, n$, får vi at

$$\|\vec{e}^{(k+1)}\|_\infty \leq L \cdot \|\vec{e}^{(k)}\|_\infty \leq L^{k+1} \cdot \|\vec{e}^{(0)}\|_\infty$$

Når A er strengt diagonal dominant er $L < 1$, så

$$\|\vec{e}^{(k)}\| = L^k \|\vec{e}^{(0)}\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \vec{e}^{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \text{elementvis}$$

$$\Rightarrow \vec{x}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}^*$$

qed.

Vi vil nå se på generelle iterasjonskjemaer, gi et konvergensresultat, og anvende det på Gauss-Seidel.

Anta at (1) er skrevet om på formen

$$\vec{x} = G\vec{x} + \vec{c} \quad , \text{ med fikspunkt } \vec{x}^* = (I-G)^{-1}\vec{c}.$$

og bruk dette til å lage et iterativt skjema:

$$\text{(2)} \qquad \vec{x}^{(k+1)} = G\vec{x}^{(k)} + c.$$

Vi trenger følgende definisjon
Spektralradien $\rho(A)$ til en matrise A er

$$\rho(A) = \max |\lambda| \quad , \quad |\lambda| \text{ eigenvalues of } A.$$

<u>Teorem 2:</u> For iterasjonsskjemaet (2) gjelder

$$\boxed{\rho(G) < 1 \iff \vec{x}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \vec{x}^*, \qquad \forall \vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n}$$

dvs. vi har konvergens hvis og bare hvis alle egenverdiene er mindre enn 1 i absolutt verdi. Beviset utelates her, men vi kan bruke dette resultatet til å bevise resten av Teorem 1. Men da er det nyttig å først skrive de iterative skjemaene på matrise-form. Splitt A opp i 3 deler:

$$A = -L + D - U \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} \ddots & & -U \\ & D & \\ -L & & \ddots \end{bmatrix}$$

D inneholder diagonalelementene,
$-L$ alle elementer under diagonalen, og $-U$ alle elementer over. Da har vi (blant mange fler) omskrivinger av (1):

Jacobi: $\quad D\vec{x} = (L+U)\vec{x} + \vec{b} \Rightarrow x = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{G_J}\vec{x} + \underbrace{D^{-1}\vec{b}}_{\vec{c}_J}$

Gauss-Seidel:

$$(D-L)\vec{x} = U\vec{x} + \vec{b} \Rightarrow x = \underbrace{(D-L)^{-1}U}_{G_{GS}} x + \underbrace{(D-L)}_{\vec{c}_{GS}}\vec{b}$$

Bevis av Theorem 1: Gauss-Seidel.

La λ være en egenverdi av G_{GS}. Vi vil vise at $|\lambda|<1$ hvis A er strengt diagonaldominant.
Vi har

$$G_{GS}\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad (\vec{v} \text{ er en egenvektor til } G_{GS})$$

dvs

$$(3) \quad (D-L)^{-1}U\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \lambda D\vec{v} = \lambda L\vec{v} + U\vec{v}$$

og la $\|\vec{v}\|_\infty = 1$, dvs. $|v_i| \leq 1$, $i=1,\cdots,n$, og det fins en m s.a. $|v_m| = 1$.

Skriv (3) på elementform:

$$\lambda \cdot a_{ii} v_i = \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} v_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} v_j \quad , \quad i=1,\cdots,m$$

Velg $i=m$ ($|v_m|=1$), og bruk triangelulikheten og $|v_i| \leq 1$:

$$|\lambda||a_{mm}| \leq |\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}| + \sum_{j=m+1}^{n} |a_{mj}|$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda| \leq \frac{\sum_{j=m-1}^{n} |a_{mj}|}{|a_{mm}| - \sum_{j=1}^{m-1} |a_{mj}|} < 1$$

Den siste ulikheten skyldes at A er strengt diagonaldominant.

qed.

Det er mulig å få raskere konvergens ved å velge G slik at $\rho(G)$ er mindre. Et alternativ er å bruke en relaksasjonsparameter ω sammen med GS, no som resulterer i Suksessiv Over Relaksasjon (SOR)

SOR:
$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

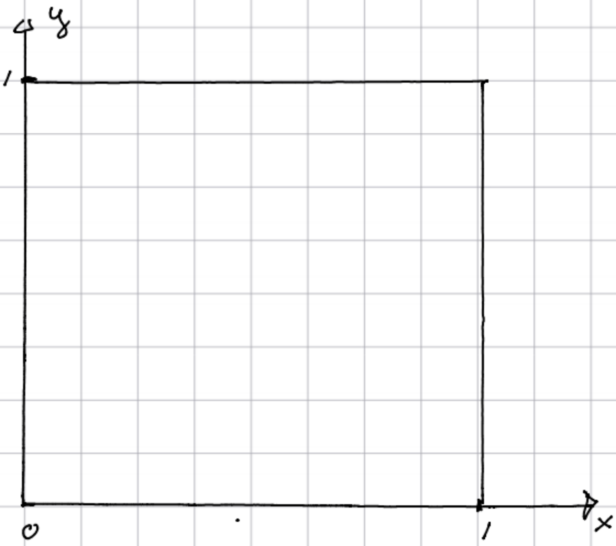
Det kan vises at $0 < \omega < 2$ er nødvendig, men ikke tilstrekkelig for at SOR skal konvergere.

Hvis A er SPD, og $0 < \omega < 2$, vil SOR konvergere for alle $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Generelt er det vanskelig å finne den ω som gir raskest konvergens.

Eksempel på anvendelse.

Anta vi har en kvadratisk plate, materialet leder varme, og vi kjenner temperaturen langs kanten. Hva er temperaturfordelingen over plata.
For enkelhets skyld har plata lengde 1 i hver retning.



Problemet kan løses litt intuitivt (at ideen er fornuftig kan verifiseres i TM4212).

Legg et grid over området, dvs.

- Velg N, la $h = 1/N$, $x_i = ih$, $y_j = j \cdot h$, $i,j = 0, \cdots, N$
- La $T_{ij} \approx T(x_i, y_j)$, en tilnærmelse til temp. i gridpunktene.
- T_{ij} er kjent hvis i og/eller j er 0 eller 1 (randa)
- La

$$(4) \qquad T_{ij} = \frac{1}{4}\left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} \right), \quad i,j = 1, \cdots, N.$$

Det er selvfølgelig mulig å sette dette opp som et lineært ligningssystem: $A\vec{T} = \vec{b}$, der $\vec{T}$ er en vektor med alle indre punkter, og $\vec{b}$ inneholder randverdiene.
Men det er ikke nødvendig, siden (4) allerede er på fikspunkt form. Så vi får:

Jacobi: $T_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(T_{i+1,j}^{(k)} + T_{i-1,j}^{(k)} + T_{ij+1}^{(k)} + T_{ij-1}^{(k)}\right)$

Gauss-Seidel:

for $j = 1:N-1$

for $i = 1:N-1$

$$T_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(T_{i+1j}^{(k)} + T_{i-1,j}^{(k+1)} + T_{ij+1}^{(k)} + T_{ij-1}^{(k+1)}\right)$$

og du kan selv skrive opp SOR i dette tilfellet.

For dette spesielle eksempelet kan det vises at:

$$\rho(G_J) = \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx 1 - \frac{\pi^2}{2N^2}$$

$$\rho(G_{GS}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx 1 - \frac{\pi^2}{N^2}$$

og for SOR:

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1+\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}, \quad \rho(G_{\omega_{opt}}) = \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)} \approx 1 - \frac{2\pi}{N}.$$