

Svar på spørsmål som har kommet inn.
Eksempler fra øving 7.

Konvergens av $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$

Iterasjons-skjema: $\vec{x}^{(k+1)} = G\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Eksakt løsnin $\vec{x}^* = G\vec{x}^* + \vec{c}$

Teorem: Gitt iterasjonskjemaet $\vec{x}^{(k+1)} = G\vec{x}^{(k)} + \vec{c}$.

Hvis $\|G\| < 1$ konvergerer $x^{(k)}$ mot løsningen

$\vec{x}^*$ for alle $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Verktøy: Norm $\|\cdot\|: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. (les om egenskapene).

Naturlig/tilordnet matrisenorm: $\|A\| = \max_{\|\vec{v}\| \neq 0} \frac{\|A\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$.

Vi skal bruke følgende: $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (1)

$\|A\vec{v}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{v}\|$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^d$ (2)

Bevis:

Feil: $\vec{e}^{(k+1)} = \vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)} = G(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}) = G \cdot \vec{e}^{(k)}$

Ta normen på begge sider:

$$\|\vec{e}^{(k+1)}\| = \|G \cdot \vec{e}^{(k)}\| \stackrel{(2)}{\leq} \|G\| \cdot \|\vec{e}^{(k)}\| \stackrel{(2)}{\leq} \|G\|^{k+1} \cdot \|\vec{e}^{(0)}\|$$

Hvis $\|G\| < 1 \Rightarrow \|G\|^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|\vec{e}^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \vec{e}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x}^* \quad \square$$

Det spiller ingen rolle hvilken vektornorm som brukes.

Øving 7, oppg. 8b.

Kan skrives på formen $\vec{x}^{(k+1)} = G \vec{x}^{(k)} + \vec{c}$ med

$$G = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & +1/4 \\ 1/3 & 1/6 & -1/6 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi finner at $\|G\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^3 |g_{ij}| = \max \{ 3/4, 1/3, 3/4 \} = 3/4 < 1$
eller

$\|G\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^3 |g_{ij}| = \max \{ 5/6, 2/3, 2/3 \} = 5/6 < 1$
eller

$$\|G\|_2 = \rho(G^T G) = 0.7359... < 1$$

Så skjemaet konvergerer.

NB! Det er nok å vise at $\|G\| < 1$ i en norm.

LU-faktorisering med pivotering.

Se notat 1 om num.lin. alg.

Øving 7, oppg. 7. (litt modifisert)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & \color{red}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ ønsker } P \cdot A = L \cdot U$$

med skalert, radvis pivotering.

$$\text{Skaleringsvektor: } s = [2, 3, 1]^T$$

$$\text{Pivoteringsvektor: } \vec{p} = [1, 2, 3]$$

$$\text{Finn 1. pivot element: } \max_i \left\{ \left| \frac{a_{i1}}{s_i} \right| \right\} = \max \left\{ \frac{1}{2}, \underline{\frac{2}{3}}, 0 \right\}$$

$$\text{Bytter rad 1 og 2: } \vec{p} = [2, 1, 3]^T$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$m_{p_2,1} = 1/2$
 $m_{p_3,1} = 0$

$$\text{Finn 2. pivot element: } \max_{i=2,3} \left\{ \left| \frac{a_{pi}}{s_{p_i}} \right| \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \underline{1} \right\}$$

$$\text{Bytter } p_2 \text{ og } p_3: \vec{p} = [2, 3, 1]^T$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$m_{p_3,2} = 1/2$

så?

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

siden

$$p = [2, 3, 1] \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sjekk at svaret er rett?

$$P \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Newton's metode for systemer av ligninger.

Skalar versjon: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k = 0, 1, \dots$

Systemer: $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Newton's metode: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - J(x_k)^{-1} \vec{f}(\vec{x}_k)$, $k = 0, 1, \dots$

der Jacobi-matrisa er

$$J(\vec{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

I praksis inverteres ikke matriser, så algoritmen er

for $k = 0, 1, 2, \dots$

løs $J(x_k) \cdot \vec{\Delta} = -\vec{f}(\vec{x}_k)$ mhp. $\vec{0}$

Oppdater: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \vec{\Delta}$

Øving 7, oppg. 2.

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 5x_1^2 - x_2^2 \\ x_2 - \frac{1}{4}(\sin x_1 + \cos x_2) \end{bmatrix}$$

$$J(x) = \begin{bmatrix} 10x_1 & -2x_2 \\ -\frac{1}{4}\cos x_1 & 1 + \frac{1}{4}\sin x_1 \end{bmatrix}$$

Oppgitt $x_0 = [1, 1]$

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} 4.0 \\ 0.6546 \end{bmatrix}, \quad J(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -0.1351 & 1.2104 \end{bmatrix}$$

$$\text{Los: } J(\vec{x}_0) \cdot \vec{\Delta} = -\vec{f}(\vec{x}_0) \Rightarrow \Delta = \begin{bmatrix} -0.5196 \\ -0.5988 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{\Delta} = \begin{bmatrix} 0.4802 \\ 0.4012 \end{bmatrix}, \quad \text{osv.}$$

Stive differensialligninger:

En ODE er stiv dersom løsningen består av komponenter på ulike tidsskalaer: Raske, som går mot 0 på en tidsskala mye mindre enn den steglengden vi ønsker at ODE løseren bruker, og langsomme. Og det er de siste vi er interessert i, men de første som skaper problemer. Det er vanlig å illustrere dette med det lineære testproblemet:

$$\vec{y}' = A \cdot \vec{y}, \quad A \in \mathbb{R}^{d \times d} \text{ diagonaliserbar.}$$

Eigenverdier λ_i , egenvektorer $\vec{v}_i$

$$\text{Løsning: } \vec{y}(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \cdot \vec{v}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

$\{c_i\}$ avhenger av startverdien $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$.

Antagelse: $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$.

Problemet er stivt hvis $\min_i \operatorname{Re}(\lambda_i) \ll \max_i \operatorname{Re}(\lambda_i)$

Hvis $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$ raskt, på $t \sim 1/|\operatorname{Re} \lambda_i|$
Vi ønsker en ODE løser med steglengder mye lengre enn det.

Derfor testligningen:

$$y' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}^- \quad (\operatorname{Re}(\lambda) < 0), \quad |y(t_n+h)| < |y(t_n)|$$

For alle RK-metoder gjelder:

$$y_{n+1} = R(z) \cdot y_n, \quad z = h \cdot \lambda, \quad R \text{ er en rasjonal funksjon.}$$

Så vi krever at

$$|y_{n+1}| < |y_n| \Rightarrow |R(z)| < 1.$$