

Oppgave 1. (10%)

Skriv om den 3.ordens differensialligningen

$$u''' + tu'' + \cos u = 0$$

med startverdier

$$u(1.0) = 2.0, \quad u'(1.0) = 1.5, \quad u''(1.0) = -0.5$$

til et system av første ordens differensialligninger.

Gjør et steg med Eulers metode på dette systemet, bruk steglengde $h = 0.1$.

Løsningsforslag.

La $y_1 = u$, $y_2 = u'$ og $y_3 = u''$, og systemet av 1.ordens differensialligninger blir:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(1.0) &= 2.0 \\ y_2' &= y_3, & y_2(1.0) &= 1.5 \\ y_3' &= -t y_3 - \cos y_1, & y_3(1.0) &= -0.5. \end{aligned}$$

Et steg med Eulers metode med $h = 0.1$ gir

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= y_{1,0} + h y_{2,0} = 2.0 + 0.1 \cdot 1.5 & &= 2.15 \\ y_{2,1} &= y_{2,0} + h y_{3,0} = 1.5 + 0.1 \cdot (-0.5) & &= 1.45 \\ y_{3,1} &= y_{3,0} + h(-t_0 \cdot y_{3,0} - \cos y_{1,0}) \\ &= -0.5 + 0.1 \cdot (-1.0 \cdot (-0.5) - \cos 2.0) & &= -0.4084 \end{aligned} .$$

Oppgave 2. (10%)

a) For $\mathbf{x} = (4.2, -3.2, 0.1)^\top$, beregn vektornormene $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ og $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

b) For en generell $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vis at

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1.$$

Løsningsforslag.

a) $\|\mathbf{x}\|_1 = 7.5$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 5.2811$ og $\|\mathbf{x}\|_\infty = 4.2$.

b) Dette er det samme som å vise at

$$\|\mathbf{x}\|_\infty^2 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{x}\|_1^2.$$

Da har vi

$$\|\mathbf{x}\|_\infty^2 = \left(\max_i |x_i| \right)^2 = |x_q|^2, \quad \text{der } q = \arg \max_i |x_i|.$$

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_i |x_i|^2 = x_q^2 + \overbrace{\sum_{i \neq q} |x_i|^2}^{\geq 0} \geq |x_q|^2 = \|\mathbf{x}\|_\infty^2,$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left(\sum_i |x_i| \right)^2 = \sum_i |x_i|^2 + \overbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} |x_i| |x_j|}^{\geq 0} \geq \sum_i |x_i|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

□

Oppgave 3. (5%)

Hvilke(n) av følgende tre matriser er strengt diagonaldominante?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.4 & -4.7 & 2.6 \\ 1.3 & 5.3 & 0.1 \\ -0.4 & 3.2 & 8.7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 & 0.8 \\ 2.4 & -6.3 & 2.7 \\ -0.3 & 1.2 & -2.3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2.7 & 1.2 & -1.2 \\ 1.0 & 2.2 & -1.2 \\ 0.3 & 2.7 & 5.4 \end{pmatrix}$$

Løsningsforslag.

En matrise $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ er strengt diagonaldominant dersom

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Bare A_2 tilfredstiller denne betingelsen. A_3 er diagonaldominant, men ikke strengt diagonaldominant.

Oppgave 4. (20%)

I denne oppgaven skal vi se på *tridiagonale lineære ligningssystemer*, det vil si ligninger på formen

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{med} \quad a_0 = c_n = 0,$$

eller

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

- a) Vis at en naiv Gauss-eliminasjon (altså uten pivoting) gjør dette om til et øvre triangulært ligningssystem på formen

$$\begin{pmatrix} b'_1 & c_1 & & & 0 \\ 0 & b'_2 & c_2 & & \\ & 0 & b'_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & 0 & b'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ \vdots \\ d'_n \end{pmatrix}.$$

Det vil si at diagonalelementene og høyresiden endres i prosessen, mens første øvre subdiagonal (c_i) er uendret.

Utlede de rekursive uttrykkene for b'_i og d'_i .

- b) Under hvilke betingelser på koeffisientene a_i , b_i og c_i kan du være sikker på at systemet har en entydig løsning, og at alle pivotelementene b'_i er forskjellig fra 0.
- c) En slik naiv Gauss-eliminasjon med tilbakeløsning er implementert i Algoritme 1. Hvor mange flyttallsoperasjoner bruker algoritmen for å løse et tridiagonalt ligningssystem med n ligninger?

Til informasjon: Programmeringsoppgaven handler om å implementere og anvende denne algoritmen.

Løsningsforslag.

Algorithm 1 Algoritme for løsning av lineære, tridiagonale ligningssystemer**Input:** $(a_i)_{i=2}^n, (b_i)_{i=1}^n, (c_i)_{i=1}^{n-1}, (d_i)_{i=1}^n$.**for** $i = 2, 3, \dots, n$ **do**

▷ Gauss-eliminasjon

$$w \leftarrow \frac{a_i}{b_{i-1}}$$

$$b_i \leftarrow b_i - wc_{i-1}$$

$$d_i \leftarrow d_i - wd_{i-1}$$

end for

$$x_n = \frac{d_n}{b_n}$$

for $i = n-1, n-2, \dots, 1$ **do**

▷ Tilbakeløsning

$$x_i = \frac{d_i - c_i x_{i+1}}{b_i}$$

end for**Output:** $(x_i)_{i=1}^n$.a) Første eliminasjonssteg, $i = 2$ gir:

$$m_{21} = \frac{a_2}{b_1},$$

$$m_{i1} = 0 \text{ for } i = 3, 4, \dots, n.$$

$$b'_2 = b_2 - m_{21}c_1$$

$$c'_2 = c_2 - m_{21} \cdot 0 = c_2$$

$$d'_2 = d_2 - m_{21} \cdot d_1$$

og alle andre elementer på rad i forblir 0. Etter første eliminasjonssteg er altså systemet redusert til

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ 0 & b'_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d'_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Den transformerte submatrisen (rad og kolonne 1 fjernet) er også tridiagonal, så argumentet for første eliminasjonssteg gjelder også for de påfølgende, dvs.

$$b'_1 = b_1,$$

$$d'_1 = d_1$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_i}{b'_{i-1}} c_i,$$

$$d'_i = d_i - \frac{a_i}{b'_{i-1}} d'_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

□

- b) Vi vet at en strengt diagonal dominant matrise er inverterbar, og har en LU-faktorisering uten pivotering, dvs. at en naiv Gauss-eliminering er gjennomførbar. Og matrisen er strengt diagonaldominant hvis

$$|b_1| > |c_1|, \quad |b_i| > |a_i| + |c_i| \text{ for } i = 2, \dots, n-1, \quad |b_n| > |a_n|.$$

- c) En flyttallsoperasjon (flop) består av en multiplikasjon og en addisjon, *eller* en divisjon. Gauss-eliminering prosessen krever dermed $3(n-1)$ flop, mens tilbakesløsing krever $2(n-1) + 1$ flop. Totalt kreves altså $5(n-1) + 1 \approx 5n$ flop.

(Det viktige her er at denne algoritmen krever $O(n)$ flop, mens en vanlig full Gauss-eliminering krever $O(n^3)$ operasjoner. For n stor utgjør det en enorm forskjell.)

Oppgave 5. (25%)

En implisitt Runge-Kutta metode er gitt ved følgende Butcher-tablå:

$1/4$	$1/4$	0
1	$3/4$	$1/4$
	$2/3$	$1/3$

- a) Bestem metodens orden.
- b) Sett opp ligningene som må løses for å ta et steg med steglengde h , fra y_n til y_{n+1} med denne metoden anvendt på ligningen

$$y' = -y^2.$$

La nå $y(0) = 1.0$ og $h = 0.25$, og finn $y_1 \approx y(0.25)$.

Hint: Dette innebærer å løse andregradsligninger. Disse kan du løse for hånd, eller bruk Numpys roots, om du foretrekker det. Andregradsligninger kan ha to løsninger, så tenk i så fall ordentlig gjennom hvilken av disse du velger.

- c) For en generell Runge-Kutta metode:
- Hvordan finner du en metodes stabilitetsfunksjon $R(z)$?
 - Gitt $R(z)$, definer metodens stabilitetsområde $\mathcal{S}$.
 - Definer A -stabilitet. I hvilke situasjoner er dette en ønskelig egenskap ved en metode?
- d) Den gitte metoden har stabilitetsfunksjon

$$R(z) = \frac{(1 + z/4)^2}{(1 - z/4)^2}.$$

Er metoden A -stabil? Svaret skal begrunnes.

Hint: For en tilfeldig $Z \in \mathbb{C}$ gjelder $|Z^2| = |Z|^2$.

Løsningsforslag.

a) Bruk tabellen over ordensbetingelser:

$$p = 1, \quad \sum_i b_i = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1, \quad \text{OK}$$

$$p = 2, \quad \sum_i b_i c_i = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}, \quad \text{OK}$$

$$p = 3, \quad \sum_i b_i c_i^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{3},$$

$$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1\right) = \frac{3}{16} \neq \frac{1}{6},$$

så metoden er av orden 2.

b) Et steg med denne metoden anvendt på det gitte problemet er

$$k_1 = -(y_0 + \frac{1}{4} h k_1)^2$$

$$k_2 = -(y_0 + \frac{3}{4} h k_1 + \frac{1}{4} h k_2)^2$$

$$y_1 = y_0 + \frac{2}{3} h k_1 + \frac{1}{3} h k_2$$

Den første ligningen kan løses mhp. k_1 , deretter kan den andre løses mhp. k_2 . Med $h = 1/4$ og $y_0 = 1$ får vi først

$$k_1 = -(1 + \frac{1}{16} k_1)^2 \Rightarrow \frac{1}{256} k_1^2 + \frac{9}{8} k_1 + 1 \Rightarrow k_1 = -144 \pm 64\sqrt{5} = -0.8916495, -287.10.$$

Siden $f(y_0) = -y_0^2 = -1$ velges den løsningen som ligger nærmest -1 . Ligningen for k_2 blir da

$$\frac{1}{256} k_2^2 + \left(-\frac{-9 + 6\sqrt{5}}{4} \right) k_2 + 1396 - 624\sqrt{5} = 0$$

med løsningene

$$k_2 = -192\sqrt{5} + 288 \pm 64\sqrt{-22 + 12\sqrt{5}} = -0.6295890, -282.0205142$$

og vi velger igjen den løsningen som ligger nærmest -1 . Den numeriske løsningen blir

$$y_1 = 1 - \frac{16\sqrt{5}}{3} + \frac{16\sqrt{-22 + 12\sqrt{5}}}{3} = 0.79892600.$$

(Til sammenligning er den eksakte løsningen $y(t) = 1/(1+t)$, så $y(0.25) = 0.8$.)

c)

- Gjør et steg med metoden på testproblemet $y' = \lambda y$, der $\lambda \in \mathbb{C}$, fra y_n til y_{n+1} med steglengde h . Resultatet er

$$y_{n+1} = R(z)y_n, \quad z = \lambda h.$$

- Stabilitetsområdet $\mathcal{S}$ er definert ved

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}.$$

- Metoden er A -stabil hvis

$$\mathcal{S} \supseteq \mathbb{C}^-,$$

dvs. metoden er stabil for alle steglengder h dersom realverdien av λ ikke er positiv. Dette er en ønskelig egenskap for stive ligningssystemer, typisk systemer der en har raske transienter (representert ved egenverdier med store, negative realverdier) sammen med langsomme bevegelser. Ved bruk av en A -stabil metode er det mulig å bruke store verdier for steglengden, uten at metoden blir ustabil pga. transientene.

d)

$$R(z) = \left(\frac{1 + z/4}{1 - z/4} \right)^2,$$

og vi ønsker å finne ut når $|R(z)| \leq 1$. Ved å bruke hintet, er det tilstrekkelig å finne ut når $|(1 + z/4)/(1 - z/4)| \leq 1$. La $z = v + iw$, der $v = \operatorname{Re}(z)$ og $w = \operatorname{Im}(z)$, slik at

$$\left| \frac{1 + z/4}{1 - z/4} \right|^2 = \frac{(1 + v/4)^2 + w^2/16}{(1 - v/4)^2 + w^2/16} \leq 1 \quad \text{for } v \leq 0, \text{ og dermed for alle } z \in \mathbb{C}^-.$$

Metoden er A -stabil.

Oppgave 6. (10%)

En tilfeldig valgt Runge-Kutta metode anvendt på en skalar ordinær differensialligning

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < t < t_{\text{end}}, \quad y(0) = y_0$$

kan skrives på formen

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n; h).$$

La N være antall steg, steglengden $h = t_{\text{end}}/N$, $t_n = nh$ og $y_n \approx y(t_n)$ for $n = 0, \dots, N$.

Anta at det fins positive konstanter M og D slik at inkrementfunksjonen Φ tilfredsstiller

$$|\Phi(t, y; h) - \Phi(t, z; h)| \leq M|y - z|$$

for alle t , y og z nær løsningen, og at den lokale avbruddsfeilen

$$d_{n+1} = y(t_n + h) - (y(t_n) + h\Phi(t_n, y(t_n); h))$$

tilfredsstiller

$$|d_{n+1}| \leq Dh^{p+1}.$$

Vis at den globale feilen i t_{end} oppfyller

$$|e_N| = |y(t_{\text{end}}) - y_N| \leq Ch^p$$

der C er en konstant. Finn C uttrykt ved konstantene D , M og t_{end} .

Framgangsmåten er den samme som i beviset for konvergens av Eulers metode.

Nyttige formler:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{r^N - 1}{r - 1} \text{ for } r \in \mathbb{R}, \quad \text{og} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Løsningsforslag.

Fra oppgaveteksten vet vi at

$$\begin{aligned} y(t_n + h) &= y(t_n) + h\Phi(t_n, y(t_n); h) + d_{n+1}, \\ y_{n+1} &= y_n + h\Phi(t_n, y_n; h). \end{aligned}$$

Differansen mellom disse gir et rekursivt uttrykk for den globale feilen $e_n = y(t_n) - y_n$:

$$e_{n+1} = e_n + h(\Phi(t_n, y(t_n); h) - \Phi(t_n, y_n; h)) + d_{n+1}$$

Ta absoluttverdien på begge sider, bruk trekantuliketen og de oppgitte egenskapene til Φ og d_{n+1} :

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + h \overbrace{|\Phi(t_n, y(t_n); h) - \Phi(t_n, y_n; h)|}^{\leq M|y(t_n) - y_n|} + \overbrace{|d_{n+1}|}^{\leq Dh^{p+1}}$$

så

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hM)|e_n| + Dh^{p+1}.$$

Og, siden $d_0 = 0$ får vi:

$$|e_1| \leq Dh^{p+1}$$

$$|e_2| \leq ((1 + hM) + 1)Dh^{p+1}$$

$\vdots$

$$|e_N| \leq \sum_{n=0}^{N-1} (1 + hM)^n Dh^{p+1}$$

Tips 1

$$= \frac{(1 + hM)^N - 1}{1 + hM - 1} Dh^{p+1} = \frac{(1 + hM)^N - 1}{M} Dh^p$$

$$1 + hM \leq e^{hM} \quad (\text{Tips 2})$$

$$\leq \frac{e^{NhM} - 1}{M} Dh^p = \frac{e^{t_{\text{end}}M} - 1}{M} Dh^p.$$

$$Nh = t_{\text{end}}.$$

$$\text{så } C = \frac{e^{t_{\text{end}}M} - 1}{M} D.$$