LF: Øving 3

Oppgave 2.

Vi vet: $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$$\|A\|_1 = \max_{\substack{\forall x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|_1 = 1}} \|A\vec{x}\|_1 \qquad \text{(definisjon).}$$

Vi skal vise at $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

For det må vi vise to ting:

a) $\|A\vec{x}\|_1 \leq \|A\|_1 \cdot \|x\|_1$ for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\vec{x}\|_1 = 1$

b) At det fins en $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = 1$ slik at

$$\|A\vec{x}\| = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1.$$

La oss starte med a):

$$\begin{aligned}
\|A\vec{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| && \text{trekant ulikheten} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| && \text{Bytter rekkefølge av summene} \\
&\leq \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\Big)}_{\|\vec{x}\|_1} \cdot \underbrace{\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}_{\|A\|_1} = \|A\|_1 \cdot \|x\|_1
\end{aligned}$$

b) Finn en $\vec{x}$, $\|\vec{x}\| = 1$ s.a. $\|A\vec{x}\|_1 = \|A\|_1$.
Hvilket betyr at vi må finne en $\vec{x}$ slik at de to ulikhetene erstattes av likhet.
Velg q s.a.

$$\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} |a_{iq}|$$

og velg $\vec{x} = \vec{e}_q = (0, \cdots 0, \underbrace{1}_{\text{element } q}, 0, \cdots 0)$,

Det er opplagt at $\|\vec{x}\|_1 = 1$.
Og med dette valget av $\vec{x}$ får vi

$$\|A\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_{iq}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_1 .$$

Og vi har vist at $\|A\|_1$ er den tilordnede matrisenormen til $\|\cdot\|_1$.

b) Vi skal vise:

- $\|\vec{x}\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2 \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Siden 2-normen er med, er det praktisk å kvadrere alt. Da har vi

$$\|\vec{x}\|_\infty^2 = (\max_i |x_i|)^2 = x_q^2 \qquad \text{der } q = \arg\max_i |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q}}^{n} x_i^2 + x_q^2 \geq x_q^2 = \|\vec{x}\|_\infty^2$$

$$\|\vec{x}\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_j \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} |x_i||x_j| \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|\vec{x}\|_2^2$$

$\square$

De to andre overlates til dere selv.

Kommentar:

To normer på samme vektorrom V er ekvivalente hvis det fins konstanter $c_1, c_2 > 0$ slik at

$$c_1 \|v\|_a \leq \|v\|_b \leq c_2 \|v\|_a , \quad \text{for alle } v \in V.$$

Alle normer i $\mathbb{R}^n$ er ekvivalente. Det betyr f.eks. at dersom v er begrenset i en norm, er v begrenset i alle. Tilsvarende, kan vi vise konvergens i en norm, har vi vist det for alle.

Oppgave 3:

a) Skriv de 3 ligningene på matriseform:

(3.1) $$A\vec{x} = \vec{b}$$

La $D = \text{diag}\{a_{11}, \cdots a_{nn}\}$. Da er

(3.2) $$D\vec{x} + (A-D)\vec{x} = \vec{b}$$

og

(3.3) $$\vec{x} = -D^{-1}(A-D)\vec{x} + D^{-1}b$$
$$= D^{-1}b + (I - D^{-1}A)\vec{x}$$

så

$$G = (I - D^{-1}A) \quad \text{og} \quad c = D^{-1}b$$

b) Komponentene til G, g_{ij} er gitt ved

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i = j \\ -a_{ij}/a_{ii} & \text{hvis } i \neq 0. \end{cases}$$

A er strengt diagonaldominant hvis

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \iff 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \quad \text{for } \underline{\text{alle}} \ i = 1, \cdots, n.$$

Anta at A er SDD: Da gjelder

$$\|G\|_\infty = \max_i \sum_{j=1} |g_{ij}| = \max_i \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|}_{< 1 \text{ for alle } i.} < 1.$$