Øving 5

1

a) Bestem hvilke (om noen) av funksjonene under som er Lipschitz-kontinuerlige med hensyn på y for alle $t, y \in \mathbb{R}$:

1. $f(t,y) = \dfrac{y}{t}$
2. $f(t,y) = \dfrac{\sin(t)}{t} y$

Vis at ligningen

$$y' = \sqrt{1-y^2}, \qquad y(t) = 0$$

har løsningen $y(t) = \sin(t)$. Er løsningen unik?

b) Hvordan samsvarer svaret med teoremet om eksistens og entydighet av løsninger.

2

Gitt følgende *skalare* differensialligning

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad y(t_0) = y_0.$$

En generell eksplisitt Runge-Kutta metode med to nivåer anvendt på denne ligningen er gitt ved

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n), \\ k_2 &= f(y_n + h a_{21} k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2). \end{aligned}$$

a) Skriv ned den lokale avbruddsfeilen

$$d_1 = y(x_0 + h) - y_1$$

som en potensrekke i h. Hvilke betingelser må koeffisientene a_{21}, b_1 og b_2 oppfylle for at metoden skal være av orden 1? Av orden 2? Kan metoden bli av orden 3?

b) Finn et optimalt valg av parametre. Her har du litt frihet i hva du definerer som optimalt, men begrunn valget ditt.

Hint En tilsvarende rekkeutvikling ble gjort for Heuns metode i notatet, men det du skal gjøre her er enklere, siden funksjonen f bare avhenger av $y(x)$.

3 Vi skal løse en ordinær differensialligning med $y' = f(t, y)$ med følgende Runge–Kutta metode:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ y_{n+1} &= y_n + hk_2. \end{aligned}$$

NB! I denne oppgaven er det tenkt at dere kan bruke tabellen over ordensbetingelser.

a) Sett opp Butcher-tablået for denne metoden, og vis at metoden har orden 2.

b) Vi ønsker nå å lage en feilestimerende metode.

Vis at det ikke fins en metode av orden 3 på formen

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h\hat{b}_1 k_1 + h\hat{b}_2 k_2$$

der k_1 og k_2 er gitt over.

c) For å finne en feilestimerende metode trenger vi et ekstra nivå. La dette være gitt ved

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4}k_2\right).$$

Bestem $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ og $\hat{b}_3$ slik at

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h(\hat{b}_1 k_1 + \hat{b}_2 k_2 + \hat{b}_3 k_3)$$

gir en metode av orden 3.

d) Anvend metoden på ligningen

$$y' = -y^2, \qquad y(0) = 1.$$

- La første steglengde være $h = 0.2$ og gjør et steg med metoden av høyest orden.
- Beregn det lokale feilestimatet etter første steg, $|\hat{y}_1 - y_1|$.
- Sammenlign det lokale feilestimatet med toleransen $\text{Tol} = 10^{-2}$.
  - Kan steget aksepteres eller ikke?
  - Hvordan vil du velge neste steglengde (uavhengig om løsningen aksepteres eller ikke). Bruk pessimistfaktor $P = 0.8$.
  - Hvis steget aksepteres, hvilken av de to verdiene for y_1 vil du bruke som startverdi for neste steg?

e) Implementer og test metoden på det gitte problemet.

4 Gitt følgende Runge-Kutta metode av orden 3

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n) \\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4}k_2\right) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{9}\big(2k_1 + 3k_2 + 4k_3\big).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

a) Bestem metodens stabilitetsfunksjon $R(z)$ og finn det korresponderende stabilitetsintervallet, dvs den delen av stabilitetsområdet som ligger på den reelle tallinjen,

$$S_{\text{interval}} = \{z \in \mathbb{R} : |R(z)| \le 1\}$$

b) Vi skal nå se på et system av ligninger:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \qquad A = \begin{bmatrix} -41 & 38 \\ 19 & -22 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

c) Beregn egenverdiene til A. Hva er den største steglengden h du kan bruke når denne ligningen løses med metoden gitt over her.

d) La nå

$$A = \begin{bmatrix} -a & -a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

der a er en reell parameter og $a > 0$.

Hva er nå den største steglengden h du kan bruke når denne ligningen løses med metoden gitt over her.

Hint: Du ender opp med å måtte løse en høy ordens ligning. Bruk hva verktøy du måtte ha tilgjengelig, og et numerisk svar av typen $ah <???$ er tilstrekkelig.

e) Implementer metoden og verifiser resultatene numerisk.

Bruk startverdiene $\mathbf{y}(0) = [1, 1]^\top$ og integrer over intervallet $[0, 1]$.

5 Den *implisitte midtpunktregelen* anvendt på en ODE $y' = f(t, y)$ er gitt ved

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

a) Skriv ned metodens Butcher-tableau, og bestem metodens orden.

b) Bestem stabilitetsfunksjonen $R(z)$ og vis at metoden er A-stabil.

c) Implementer metoden for differensialligninger på formen

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(x).$$

Test programmet på ligningen fra oppgave 2, og demonstrer at det er mulig å bruke store steglengder uten at den numeriske løsningen blir ustabil.