Øving 5

1

a) Bestem hvilke (om noen) av funksjonene under som er Lipschitz-kontinuerlige med hensyn på y for alle $t, y \in \mathbb{R}$:

1. $f(t,y) = \dfrac{y}{t}$
2. $f(t,y) = \dfrac{\sin(t)}{t} y$

Vis at ligningen

$$y' = \sqrt{1-y^2}, \qquad y(t) = 0$$

har løsningen $y(t) = \sin(t)$. Er løsningen unik?

b) Hvordan samsvarer svaret med teoremet om eksistens og entydighet av løsninger.

Løsningsforslag.

a) $|f(t,y) - f(t,z)| = |\frac{1}{t}||y - z|$, så Lipschitzbetingelsen er ikke oppfyllt for $t = 0$. Men den vil være det for $t > \tau$ for en $\tau > 0$, i så fall kan Lipschitzkonstanten velges til $1/\tau$.

b) $|f(t,y) - f(t,z)| = |\frac{\sin(t)}{t}||y - z|$, og $\frac{\sin(t)}{t} = \operatorname{sinc} t \in [-1,1]$. Så f er Lipschitz-kontinuerlig med $L = 1$.

c) Vi har at

$$y' = \cos t = 1 - \sin^2(t) = \cos(t), \text{ og } y(0) = \sin(0) = 0$$

så $y(t) = \sin(t)$ er en løsning av ligningen. Men det er også

$$y(t) = \begin{cases} \sin(t), & t < \pi/2 \\ 1, & \pi/2 \le t < \tau \\ \sin(t - \tau + \pi/2), & \tau \le t \end{cases}$$

for en eller annen $\tau > 0$. Så løsningen er ikke entydig, noe som betyr at betingelsene i teoremet ikke kan være tilfredsstilt.

- ⋆ $f(y) = \sqrt{1-y^2}$ er kontinuerlig for alle $y \le 1$.
- ⋆ Men f er ikke Lipschitz-kontinuerlig for alle y. Vi har at

$$|f(y) - f(z)| = |f_y(\xi)||y - z|, \text{ for en } \xi \text{ mellom } x \text{ og } y,$$

og

$$|f_y(y)| = |-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}| \xrightarrow[|y|\to 1]{\infty}$$

så Lipschitzbetingelsen er ikke oppfyllt for $y = 1$.

Imidlertid er løsningen entydig så lenge $|y(t)| < 1$.

2 Gitt følgende *skalare* differensialligning

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad y(t_0) = y_0.$$

En generell eksplisitt Runge-Kutta metode med to nivåer anvendt på denne ligningen er gitt ved

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n), \\ k_2 &= f(y_n + ha_{21}k_1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2). \end{aligned}$$

a) Skriv ned den lokale avbruddsfeilen

$$d_1 = y(x_0 + h) - y_1$$

som en potensrekke i h. Hvilke betingelser må koeffisientene a_{21}, b_1 og b_2 oppfylle for at metoden skal være av orden 1? Av orden 2? Kan metoden bli av orden 3?

b) Finn et optimalt valg av parametre. Her har du litt frihet i hva du definerer som optimalt, men begrunn valget ditt.

Hint En tilsvarende rekkeutvikling ble gjort for Heuns metode i notatet, men det du skal gjøre her er enklere, siden funksjonen f bare avhenger av $y(x)$.

Løsningsforslag.

a) Siden f bare avhenger av $y(t)$, får vi

$$\begin{aligned} y'(t) &= f, \\ y''(t) &= f_y y' = f_y f, \\ y'''(t) &= f_{yy} y' f + f_y f_y y' = f_{yy} f^2 + (f_y)^2 f, \end{aligned}$$

Her er $f_y(y) = \partial f(y)/\partial y$. Alle ledd av typen f_t forsvinner. Rekkeutviklinger av løsningen y i $t_0 + h$ gitt ved

$$y(t_0 + h) = y_0 + hf + \frac{h^2}{2}(f_y f) + \frac{h^3}{6}(f_{yy} f f + f_y f_y f) + \cdots,$$

hvor alle funksjoner og deres deriverte er evaluert i y_0. For den explisitt Runge-Kutta metode får vi da

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(y_0) = f, \\
k_2 &= f(y_0 + ha_{21}k_1) \\
&= f + f_y h a_{21} k_1 + \frac{1}{2} f_{yy} a_{21}^2 h^2 k_1^2 + \cdots \\
&= f + ha_{21}(f_y f) + a_{21}^2 \frac{h^2}{2}(f_{yy} f^2) + \cdots, \\
y_1 &= y_0 + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) = y_0 + h(b_1 f + b_2(f + ha_{21}(f_y f) + a_{21}^2 \frac{h^2}{2}(f_{yy} f^2)) + \cdots
\end{aligned}
$$

Den lokale avbruddsfeil er gitt som differensen mellom rekkeutviklen av den beregnede løsningen og den eksakte løsningen.

$$d_1 = y(t_0+h)-y_1 = hf(1-b_1-b_2)+h^2 f_y f(1/2-b_2 a_{21})+h^3(\frac{1}{6}(f_{yy}f^2+f_y f_y f)-\frac{1}{2}b_2 a_{21}^2 f_{yy} f^2)+\cdots$$

For at dette skal være en første ordens metode må det første leddet forsvinne,

$$1 - b_1 - b_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b_1 + b_2 = 1.$$

Hvis vi ønsker en andre ordens metode, trenger vi at både det første og det andre leddet forsvinner, slik at i tillegg til betingelsen over må følgende oppfylles:

$$1/2 - b_2 a_{21} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad b_2 = \frac{1}{2a_{21}}.$$

Videre, dersom vi ønsker en tredje ordens metode, må det tredje leddet også forsvinne. Dette kan ikke skje dersom $f_y f_y f$ er forskjellig fra null.

b) Selv om vi ikke klarer å bli kvitt leddet $f_y f_y f$, så kan vi jo bruke den siste frihetsgraden til å fjerne leddet $f_{yy} f^2$, dvs. legge til ordensbetingelsen

$$b_2 a_{21}^2 = \frac{1}{3}.$$

Vi har da tre ligninger i 3 ukjente, b_1, b_2 og a_{21}, og løsningen av disse er

$$b_1 = \frac{1}{4}, \quad b_2 = \frac{3}{4}, \quad a_{21} = \frac{2}{3}.$$

3 Vi skal løse en ordinær differensialligning med $y' = f(t, y)$ med følgende Runge–Kutta metode:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n), \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right), \\
y_{n+1} &= y_n + hk_2.
\end{aligned}
$$

NB! I denne oppgaven er det tenkt at dere kan bruke tabellen over ordensbetingelser.

a) Sett opp Butcher-tablået for denne metoden, og vis at metoden har orden 2.

b) Vi ønsker nå å lage en feilestimerende metode.

Vis at det ikke fins en metode av orden 3 på formen

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h\hat{b}_1 k_1 + h\hat{b}_2 k_2$$

der k_1 og k_2 er gitt over.

c) For å finne en feilestimerende metode trenger vi et ekstra nivå. La dette være gitt ved

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4}k_2\right).$$

Bestem $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$ og $\hat{b}_3$ slik at

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h(\hat{b}_1 k_1 + \hat{b}_2 k_2 + \hat{b}_3 k_3)$$

gir en metode av orden 3.

d) Anvend metoden på ligningen

$$y' = -y^2, \qquad y(0) = 1.$$

- La første steglengde være $h = 0.2$ og gjør et steg med metoden av høyest orden.
- Beregn det lokale feilestimatet etter første steg, $|\hat{y}_1 - y_1|$.
- Sammenlign det lokale feilestimatet med toleransen $\mathrm{Tol} = 10^{-2}$.
  - Kan steget aksepteres eller ikke?
  - Hvordan vil du velge neste steglengde (uavhengig om løsningen aksepteres eller ikke). Bruk pessimistfaktor $P = 0.8$.
  - Hvis steget aksepteres, hvilken av de to verdiene for y_1 vil du bruke som startverdi for neste steg?

e) Implementer og test metoden på det gitte problemet.

Løsningsforslag.

a) Metoden er eksplisitt, og Butcher-tablået er

$$\begin{array}{c|cc} c_2 & a_{21} & \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array} = \begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Ordensbetingelsene sjekker du selv (1. og 2. ordens betingelse er oppfyllt, ingen av de to 3.ordens betingelsene).

b) I dette tilfellet er c_2 gitt. De to koeffisientene $\hat{b}_1$ og $\hat{b}_2$ er entydig bestemt av ordensbetingelsene for $p = 1$ og $p = 2$, som gitt over. Det fins altså ingen metode av orden 3 på formen som er foreslått.

c) Butcher-tablået for denne metoden er gitt ved:

$$\begin{array}{c|cccl} & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 3/4 & 0 & 3/4 & & \\ \hline & 0 & 1 & 0 & \text{Orden 2} \\ & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 & \text{Orden 3} \end{array}$$

Vi må oppfylle 4 betingelser, og har 3 ukjente. Så velg 3, løs ligningene, og sjekk om den siste stemmer. Betingelsene er:

$$\begin{array}{c|l} p & \\ \hline 1 & \hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 + \hat{b}_4 = 1 \\ \hline 2 & \hat{b}_2 \cdot \frac{1}{2} + \hat{b}_3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \\ \hline 3 & \hat{b}_2 \cdot \frac{1}{4} + \hat{b}_3 \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{3} \\ & \hat{b}_3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{array}$$

som har løsningen

$$\hat{b}_1 = \frac{2}{9}, \quad \hat{b}_2 = \frac{1}{3}, \quad \hat{b}_3 = \frac{4}{9}.$$

d)

a) Sett inn i formlene:

$$k_1 = -1.0, \quad k_2 = -0.81, \quad k_3 = -0.7717622500, \qquad \hat{y}_1 = 0.8329544667.$$

b) Det lokale feilestimatet er gitt ved

$$le_1 = h\big((b_1 - \hat{b}_1)k_1 + (b_2 - \hat{b}_2)k_2 + (b_3 - \hat{b}_3)k_3\big) = 5.0455333 \cdot 10^{-3}.$$

c) $|le_n| \leq \text{Tol}$, så steget aksepteres. Ny steglengde er

$$h_{\text{ny}} = P\left(\frac{\text{Tol}}{|le_1|}\right)^{1/3} \cdot h = 0.2009791277.$$

Den beste løsningen, dvs. $\hat{y}_1$ brukes som startverdi for neste steg.

e) Denne overlates det til deg selv å løse.

4 Gitt følgende Runge-Kutta metode av orden 3

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{3h}{4}, y_n + \frac{3h}{4}k_2\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{9}\big(2k_1 + 3k_2 + 4k_3\big). \end{aligned} \tag{4.1}$$

a) Bestem metodens stabilitetsfunksjon $R(z)$ og finn det korresponderende stabilitetsintervallet, dvs den delen av stabilitetsområdet som ligger på den reelle tallinjen,

$$S_{\text{interval}} = \{z \in \mathbb{R} : |R(z)| \leq 1\}$$

b) Vi skal nå se på et system av ligninger:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \qquad A = \begin{bmatrix} -41 & 38 \\ 19 & -22 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

c) Beregn egenverdiene til A. Hva er den største steglengden h du kan bruke når denne ligningen løses med metoden gitt over her.

d) La nå

$$A = \begin{bmatrix} -a & -a \\ a & -a \end{bmatrix}$$

der a er en reell parameter og $a > 0$.

Hva er nå den største steglengden h du kan bruke når denne ligningen løses med metoden gitt over her.

Hint: Du ender opp med å måtte løse en høy ordens ligning. Bruk hva verktøy du måtte ha tilgjengelig, og et numerisk svar av typen $ah <???$ er tilstrekkelig.

e) Implementer metoden og verifiser resultatene numerisk.

Bruk startverdiene $\mathbf{y}(0) = [1, 1]^\top$ og integrer over intervallet $[0, 10]$.

Løsningsforslag.

a) Fra definisjonen er stabilitetsfunksjonen gitt som $R(z) = \frac{y_{n+1}}{y_n}$, hvor $z = \lambda h$ og y_n er den numeriske løsningen etter n iterasjoner når man bruker den gitte Runge-Kutta metoden.

Vi har følgende testligning

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = y_0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda < 0,$$

som betyr at $f(t, y) = \lambda y$. Vi bruker Runge-Kutta metoden på testligningen som gir

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \lambda y_n, \\
k_2 &= \lambda(y_n + h\lambda y_n/2) \\
&= y_n(\lambda + h\lambda^2/2), \\
k_3 &= \lambda(y_n + 3hy_n(\lambda + h\lambda^2/2)/4) \\
&= y_n(\lambda + 3h\lambda^2/4 + 3h^2\lambda^3/8)
\end{aligned}
$$

$$
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3) = y_n\left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{6}\right).
$$

Dermed er stabilitetsfunksjonen gitt ved

$$
\begin{aligned}
R(z) = \frac{y_{n+1}}{y_n} &= \frac{y_n + \frac{h}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3)}{y_n} \\
&= 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2} + \frac{h^3\lambda^3}{6} \\
&= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}.
\end{aligned}
$$

For å finne stabilitetsintervallet må vi finne hvor $|R(z)| \leq 1$. Dette er ekvivalent med at

$$
-1 \leq 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} \leq 1.
$$

Den venstre ulikehten er tilfredsstilt når

$$
z > -1 - \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{17} - 4}} + \sqrt[3]{\sqrt{17} - 4} \approx -2.5,
$$

og den høyre ulikeheten er tilfredsstilt når $z < 0$. Dermed er stabilitetsintervallet

$$
S = \left(-1 - \frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{17} - 4}} + \sqrt[3]{\sqrt{17} - 4}, 0\right) \approx (-2.5, 0).
$$

b) Finn først egenverdiene til A:

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} -41 - \lambda & 38 \\ 19 & -22 - \lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= (41 + \lambda)(22 + \lambda) - 19 \times 38 \\
&= 180 + 63\lambda + \lambda^2.
\end{aligned}
$$

Ved å finne nullpunktene til dette polynomet finner vi at egenverdiene er $\lambda_1 = -60$ og $\lambda_2 = -3$.

For at ligningen skal være stabil, trenger vi at både $h\lambda_1, h\lambda_2 \in \mathscr{S}$. Dette betyr at

$$
h < 1/60 + \frac{1}{60\sqrt[3]{\sqrt{17} - 4}} - \frac{\sqrt[3]{\sqrt{17} - 4}}{60} \approx 0.0418
$$

c) I dette tilfellet er egenverdiene til A gitt ved $\lambda_{1,2} = -a(1 \pm i)$, der $i = \sqrt{-1}$. For at den numeriske løsningen skal være stabil må $|R(z)| \leq 1$ der $z = \lambda h$, dvs.

$$\begin{aligned}
|R(-a(1+i)|^2 &= |1-(1\pm i)ah + \frac{(ah)^2}{2}(1\pm i)^2 - \frac{(ah)^3}{6}(1\pm i)^3| \\
&= \left((1+ha+\frac{(ah)^2}{3}\right)^2 + \left(-ah+(ah)^2-\frac{(ah)^3}{3}\right)^2 \\
&= 1-2ah+2(ah)^2-\frac{4}{3}(ah)^3+(ah)^4-\frac{2}{3}(ah)^5+\frac{2}{9}(ah)^6 \leq 1
\end{aligned}$$

or

$$p(ah) = ah\left(-2+2(ah)-\frac{4}{3}(ah)^2+(ah)^3-\frac{2}{3}(ah)^4+\frac{2}{9}(ah)^5\right) \leq 0.$$

Og det er jo ikke så lett å finne utav med håndregning. Bruk et eller annet numerisk verktøy for å finne røttene til 5.grads polynomet $-2+2(ah)-\frac{4}{3}(ah)^2+(ah)^3-\frac{2}{3}(ah)^4+\frac{2}{9}(ah)^5$ (e.g. `numpy.root`), som bare bare ga en reel løsning, 1.6792, lag i tillegg et plott som viser at $p(ah) \leq 0$ på intervallet $ah \in (0, 1.6792)$, og vi kan konstatere at metoden er stabil for steglenger

$$h \leq \frac{1.6792}{a}.$$

d) Se vedlagte kode. Prøv e.g. $a = 10$, og se hva som skjer når h ligger litt over og litt under enn stabilitetsgrensa.

NB! Selv om du får en **stabil** løsning for $h \leq \frac{1.6792}{a}$ betyr ikke det at den er helt korrekt for h mindre enn, men nær stabilitetsgrensa.

e) Se vedlagte kode.

5 Den *implisitte midtpunktregelen* anvendt på en ODE $y' = f(t,y)$ er gitt ved

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

a) Skriv ned metodens Butcher-tabell, og bestem metodens orden.

b) Bestem stabilitetsfunksjonen $R(z)$ og vis at metoden er A-stabil.

c) Implementer metoden for differensialligninger på formen

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(x).$$

Test programmet på ligningen fra oppgave 2, og demonstrer at det er mulig å bruke store steglengder uten at den numeriske løsningen blir ustabil.

Løsningsforslag.

a) Butcher-tabellen er gitt ved

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}.$$

Metoden er av orden 2, bruk ordensbetingelsene til å vise det.
NB! Husk at regelen at en metode i s nivåer ikke kan ha orden mer enn s *bare* gjelder for eksplisitte metoder.

b) Metoden anvendt på den lineære testligningen $y' = \lambda y$ gir

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1}),$$

som løst mhp. y_{n+1} gir

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda} y_n.$$

Stabilitetsfunksjonen er dermed

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z}.$$

Metoden er A-stabil dersom $|R(z)| \leq 1$ for alle $z \in \mathbb{C}^-$, dvs. for alle z der $\Re z \leq 0$. La $z = v + iw$, der $v = \Re(z)$ og $w = \Im(z)$. Da har vi at

$$|R(z)|^2 = \frac{(1 + \frac{1}{2}(v + iw))\,(1 + \frac{1}{2}(v - iw))}{(1 - \frac{1}{2}(v + iw))\,(1 - \frac{1}{2}(v - iw))} = \frac{(1 + \frac{1}{2}v)^2 + \frac{1}{4}w^2}{(1 - \frac{1}{2}v)^2 + \frac{1}{4}w^2} \leq 1$$

eller

$$(1 + \frac{1}{2}v)^2 + \frac{1}{4}w^2 \leq (1 - \frac{1}{2}v)^2 + \frac{1}{4}w^2 \qquad \Rightarrow \qquad v \leq -v$$

hvilket åpenbart er korrekt for alle $v \leq 0$, dvs. metoden er A-stabil.

c) Et steg med midtpunktregelen anvendt på det oppgitte ligningssystemet er

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}hA(\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_{n+1}) + h\mathbf{g}(t_n + \frac{h}{2})$$

dvs.

$$\mathbf{y}_{n+1} = (I - \frac{1}{2}hA)^{-1}\left(\mathbf{y}_n + hA\frac{1}{2}\mathbf{y}_n + h\mathbf{g}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right)$$

Se vedlagt kode. Prøv gjerne koden på eksempel 3.6.1 i notatet. Det gir kanskje mer interessante resultater.