

Oppgave 1

Løs følgende initialverdiproblem for $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

$$y' \cos x + y \sin x = 1, \quad y(0) = 1.$$

Hint: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Løsningsforslag: Siden $\cos x \neq 0$ for $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ kan vi skrive denne 1.ordens lineære ligningen på standardform:

$$y' + y \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}. \quad (*)$$

En integrerende faktor er

$$e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{-\ln \cos x} = \frac{1}{\cos x},$$

der integralet utføres ved variabelbytte $u = \cos x$. Multipliserer (*) med integrerende faktor:

$$\frac{y'}{\cos x} + y \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Integrerer:

$$\frac{y}{\cos x} = \tan x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \sin x + C \cos x,$$

der C er en integrasjonskonstant som vi finner fra betingelsen $y(0) = 1$. Dette gir endelig løsning

$$y(x) = \sin x + \cos x.$$

Oppgave 2 I Postens informasjon for A-post innenlands finner vi at maksimumsmålene for sendinger i form av rull er Lengde + to ganger tverrmål = 104 cm. Med rull forstås det en sirkulær sylinder der tverrmålet er diameteren. Vi ønsker å sende en rull med størst mulig volum. Hva blir lengden og hva blir tverrmålet?

Løsningsforslag: La l betegne lengden og d diameteren, og la $a = 104$ cm. Altså er $l + 2d = a$ (strengt talt er $l + 2d \leq a$ slik oppgaven er formulert, men dersom $l + 2d < a$ kan vi jo øke l for å få større volum).

Volumet er gitt ved $V = \pi l \left(\frac{d}{2}\right)^2$. Siden $l = a - 2d$, er volumet

$$V(d) = \pi(a - 2d) \frac{d^2}{4} = \pi \left(\frac{ad^2}{4} - \frac{d^3}{2} \right),$$

gitt som en funksjon av diameteren. Vi har positivt volum for $0 < d < \frac{a}{2}$. Finner kritisk punkt:

$$V'(d) = 0 \Leftrightarrow d \left(\frac{a}{2} - \frac{3d}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow d = \frac{a}{3}.$$

Siden $V(0) = V(\frac{a}{2}) = 0$ og $V(d) > 0$ for $0 < d < \frac{a}{2}$ gir det kritiske punktet et maksimum.

Altså er diameteren $d = \frac{a}{3} = \frac{104}{3}$ cm, og lengden $l = a - 2d = \frac{a}{3} = \frac{104}{3}$ cm.

Oppgave 3 La funksjonen F være definert for $x \geq 1$ ved

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1} dt,$$

og la K være kurven $y = F(x)$ for $1 \leq x \leq 2$. Finn buelengden til K .

Bestem også arealet av rotasjonsflata som fremkommer når K dreies om linja $x = 1$.

Hint: For buelengde er $ds = \sqrt{1 + (F'(x))^2} dx$, mens differensialet for overflateareal er $dS = 2\pi r ds$, der r er avstanden til aksene.

Løsningsforslag:

Ved analysens fundamentalsetning er $F'(x) = \sqrt{x^3 - 1}$. Vi har da

$$ds = \sqrt{1 + (F'(x))^2} dx = \sqrt{1 + x^3 - 1} dx = x^{\frac{3}{2}} dx.$$

Altså er buelengden til K

$$\int_1^2 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} (4\sqrt{2} - 1).$$

For overflatearealet er avstanden til rotasjonsaksen $r = x - 1$ for $1 \leq x \leq 2$. Siden $ds = x^{\frac{3}{2}} dx$ er $dS = 2\pi(x - 1)ds = 2\pi(x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx$. Dette gir overflateareal

$$S = \int_1^2 2\pi(x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{8\pi}{35}(6\sqrt{2} + 1).$$

Oppgave 4 Bestem grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\pi - 2 \arctan n),$$

og avgjør om rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2 \arctan n)$$

er konvergent eller divergent.

Løsningsforslag: Vi skriver om grenseverdioppgaven som

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctan n}{\frac{1}{n}}. \quad (*)$$

Siden både teller og nevner går mot 0 når $n \rightarrow \infty$ kan vi bruke L'Hôpitals regel og får

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctan n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = 2.$$

Konvergens eller ikke for rekka: Siden grenseverdien (*) er 2 ser vi fra *grensesammenlignings-testen* med den divergente rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ at rekka $\sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2 \arctan n)$ også divergerer.

Oppgave 5 La K være grafen til ligninga

$$x^2 y^3 + (y + 1)e^{-x} = x + 2.$$

Finn dy/dx i punktet $(0, 1)$ og finn ligninga for tangentlinja gjennom dette punktet.

Løsningsforslag: Vi lar x være fri variabel og skriver ligninga som

$$x^2 y^3(x) + (y(x) + 1)e^{-x} = x + 2.$$

Deriverer begge sider av ligninga med hensyn på x :

$$2xy^3(x) + 3x^2y(x)^2y'(x) + y'(x)e^{-x} - (y(x) + 1)e^{-x} = 1,$$

som gir

$$y'(x) = \frac{1 - 2xy(x)^3 + e^{-x}(y(x) + 1)}{3x^2y(x)^2 + e^{-x}}.$$

Innsatt $(x, y) = (0, 1)$ gir $y'(0) = 3$.

Følgelig er tangentlinja gjennom $(0, 1)$ gitt ved $y = 1 + 3(x - 0) = 1 + 3x$.

Oppgave 6 La funksjonen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1}$ være definert for x i konvergensintervallet I . Bestem dette konvergensintervallet, og finn summen av rekka for $x \in I$.

Løsningsforslag: Vi bruker vi forholdstesten for å finne konvergensradiusen. La $a_n = \frac{x^{2n+2}}{n+1}$. Da er

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)+2}}{n+1+1}}{\frac{x^{2n+2}}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} |x^2| = |x^2|.$$

Så rekka konvergerer absolutt når $|x^2| < 1$, det vil si for $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Rekka er divergent i begge endepunktene siden vi får den harmoniske rekka både for $x = -1$ og $x = 1$. Altså er konvergensintervallet $I = \langle -1, 1 \rangle$.

Finner summen: Siden vi kan derivere $f(x)$ leddvis for $x \in I$, ser vi at

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{n+1} x^{2n+1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{2x}{1-x^2} \quad \text{for } x \in I,$$

der vi har benyttet formelen for summen til en geometrisk rekke. For å finne $f(x)$ integrerer vi (med variabelbytte $u = 1 - x^2$) og får $f(x) = -\ln(1 - x^2) + C$. Vi ser fra rekka som definerer $f(x)$ at $f(0) = 0$ som gir $C = 0$. Altså er

$$f(x) = -\ln(1 - x^2).$$

Oppgave 7 En 4 meter lang stige står opptil en vegg på et flatt underlag. Foten av stigen sklir bort fra veggene med konstant fart på 0.5 m s^{-1} (meter pr. sekund). Hvor fort beveger toppen av stigen seg når den er 2 meter over bakken?

Løsningsforslag: La $x(t)$ betegne avstanden mellom foten av stigen og veggene og la $y(t)$ være avstanden fra toppen av stigen til gulvet. Videre la $c = 4 \text{ m}$, der m er meter. Til enhver tid er $x^2(t) + y^2(t) = c^2$. Deriver på hver side med hensyn på t :

$$2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'(t) = -\frac{x(t)}{y(t)}x'(t).$$

Når $y(t) = 2 \text{ m} = b$, er $x(t) = \sqrt{c^2 - b^2} = 2\sqrt{3} \text{ m}$. Siden $x'(t) = 0.5 \text{ m s}^{-1}$ får vi

$$y'(t) = -\frac{2\sqrt{3} \text{ m}}{2 \text{ m}} 0.5 \text{ m s}^{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m s}^{-1}.$$

Altså beveger toppen av stigen nedover med fart $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m s}^{-1}$ i dette øyeblikket.

Oppgave 8 Vis ved induksjon at

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Hva er summen til rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}?$$

Løsningsforslag:

La $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Vi må vise at $S_n = \frac{n}{2n+1}$ for $n = 1, 2, \dots$ ved induksjon.

For $n = 1$ ser vi at $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$. Altså stemmer formelen for $n = 1$.

Så anta at $S_n = \frac{n}{2n+1}$ (induksjonshypotesen). Da er

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(2(n+1)-1)((2(n+1)+1))} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Altså er formelen for S_{n+1} korrekt dersom den er riktig for S_n . Ved induksjon er da formelen korrekt for alle $n = 1, 2, \dots$.

Summen av rekka er $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Oppgave 9 Avgjør om rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n} \right)^n \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

er absolutt konvergent, betinget konvergent eller divergent.

Hint: Husk $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.

Løsningsforslag:

For den **første rekka** ser vi at $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n = e^{-2}$, der vi bruker hintet i oppgaven. Siden leddene i rekka ikke går mot null når $n \rightarrow \infty$ vil rekka **divergere**.

Vi viser at den **andre rekka** er alternerende: Først, leddene har alternerende fortegn. At leddene går mot null når $n \rightarrow \infty$ følger f.eks. fra L'Hôpitals regel. Videre avtar absoluttverdien av leddene monotont for $n \geq 3$ siden $\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ for $x \geq 3$. Altså er rekka alternerende, og rekka konvergerer.

Siden $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ for $n \geq 3$, konvergerer ikke rekka absolutt ved sammenligningstesten med den harmoniske rekka. Altså vil rekka **konvergere betinget**.

For den **tredje rekka** bruker vi forholdstesten. La $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Da er

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}.$$

Siden $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^1 = e$, er $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e} < 1$, og rekka konvergerer ved forholdstesten. Siden rekka er positiv er det **absolutt konvergens**.

Oppgave 10 Vis at funksjonen $f(x) = 5x - 2$ er kontinuertlig for alle x ved å bruke ϵ, δ definisjonen av grenseverdi.

Hint: f er kontinuertlig for $x = a$ dersom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Videre er $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ hvis og bare hvis det for enhver gitt $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Løsningsforslag:

La $\epsilon > 0$ være gitt. Da er

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \Leftrightarrow |5x - 2 - (5a - 2)| < \epsilon \Leftrightarrow 5|x - a| < \epsilon \Leftrightarrow |x - a| < \frac{\epsilon}{5}.$$

Siden det er ekvivalenser mellom utsagnene, vil det siste utsagnet implisere det første utsagnet. Så ved å velge $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ har vi bevist at det alltid finnes en δ slik at $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Ergo er f kontinuertlig i hvert punkt a .