



Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

1 La  $S$  være mengden  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  i  $\mathbb{R}^4$ .

Avgjør hvilke av de følgende påstandene er sanne.

(a)  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{span } S$ .      (b)  $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \notin \text{span } S$ .      (c)  $S$  er lineært uavhengig.

2 Avgjør hvilke av de følgende påstandene er sanne.

a) La  $M_2(\mathbb{R})$  være mengden alle  $2 \times 2$ -matriser med reelle elementer.

For matrisene  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$  og  $r \in \mathbb{R}$ , definerer vi operasjonene  $A + B$  og  $rA$  som

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{pmatrix}.$$

Utstyrt med disse to operasjonene er  $M_2(\mathbb{R})$  et vektorrom.

b) La  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ . Avgjør hvilke av de følgende lineære kombinasjoner av elementer i  $S$ , dvs. uttrykk på formen

$$r_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix},$$

er lik  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(a)  $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$ .    (b)  $r_1 = 2, r_2 = 4, r_3 = -1$ .    (c)  $r_1 = -3, r_2 = 6, r_3 = 3$ .

3 La  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  and  $\sigma_3$  være Pauli matrisene, dvs.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Avgjør hvilke av de følgende påstandene er sanne.

- a) For  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  gjelder  $I \in \text{span}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ , dvs.  $I$  kan skrives som en lineær kombinasjon av  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  og  $\sigma_3$  med koeffisienter i  $\mathbb{C}$ .
- b) Mengden  $\{I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$  er lineært uavhengig.

4 La  $V$  være det komplekse vektorrommet bestående av alle funksjoner  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  utstyrt med addisjon og skalarmultiplikasjon som vektorromsoperasjoner.

Avgjør hvilke av de følgende påstandene er sanne.

- a) Mengden av funksjoner  $\{e^{-2\pi ix}, 1, e^{2\pi ix}\} \subseteq V$  er lineært avhengig.
- b) Mengden av funksjoner  $\{e^{-2\pi ix}, 0, e^{2\pi ix}\} \subseteq V$  er lineært avhengig.