TMA4410 Matematikk 2A
Vår 2026

Flervalgsoppgavene 3

Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

1 La $V = \mathbb{P}_4$ være polynomrommet av alle polynomer i en ukjent x av grad høyst 4 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La $T\colon V \to V$ være lineærtransformasjonen gitt ved at

$$T(f(x)) = xf'(x)$$

for et polynom $f(x)$ i V, der $f'(x)$ er den deriverte av polynomet $f(x)$ med hensyn til x.

a) Kjernen til T er gitt ved:

(i) $\{0\}$.
(ii) $\mathsf{Span}(\{1\})$.
(iii) $\mathsf{Span}(\{3\})$.

b) Rekkevidden til T er gitt ved:

(i) $\mathsf{Span}(\{1, x, x^2, x^3\})$.
(ii) $\mathsf{Span}(\{x, x^2, x^3, x^4\})$.
(iii) $\mathsf{Span}(\{x, 2x^2, 3x^3, 4x^4\})$.

c) Lineærtransformasjonen T er:

(i) injektiv.
(ii) surjektiv.
(iii) injektiv og surjektiv.
(iv) verken injektiv eller surjektiv.

d) Hvilke kombinasjoner av kjernen $\mathsf{Ker}(T)$ og rekkevidden $\mathsf{Ran}(T)$ kan ikke forekomme (avgjør dette uten eksplisitt utregning av $\mathsf{Ker}(T)$ og $\mathsf{Ran}(T)$:

(i) $\mathsf{Ker}(T) = \mathsf{Span}(\{1\})$ og $\mathsf{Ran}(T) = \mathsf{Span}(\{1, x, x^2, x^3, x^4\})$.
(ii) $\mathsf{Ker}(T) = \mathsf{Span}(\{1\})$ og $\mathsf{Ran}(T) = \mathsf{Span}(\{2x^2, 3x^3, 4x^4\})$.
(iii) $\mathsf{Ker}(T) = \mathsf{Span}(\{1\})$ og $\mathsf{Ran}(T) = \mathsf{Span}(\{x, x^2, x^3, x^4\})$.

e) Lineærtransformasjonen T er

(i) en isomorfi, fordi $T(0) = 0$.
(ii) ikke en isomorfi, fordi $T(1) = 0$.

$\boxed{2}$ La $V = \mathbb{P}_4$ være polynomrommet av alle polynomer i en ukjent x av grad høyst 4 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La $T\colon V \to V$ være være lineærtransformasjonen gitt ved at

$$T(f(x)) = x^4 f(1/x)$$

for et polynom $f(x)$ i V.

a) Kjernen til T er gitt ved:

(i) $\{0\}$.
(ii) $\mathsf{Span}(\{1 + x + x^2 + x^3 + x^4\})$.
(iii) $\mathsf{Span}(\{1 - x\})$.

b) Rekkevidden til T er gitt ved:

(i) $\mathsf{Span}(\{x, x^2, x^3\})$.
(ii) $\mathsf{Span}(\{1, x, x^2, x^3, x^4\})$.
(iii) $\mathsf{Span}(\{1, x, 2x^2, 3x^3, 4x^4\})$.

c) Lineær transformasjonen T er:

(i) injektiv.
(ii) surjektiv.
(iii) injektiv og surjektiv.
(iv) verken injektiv eller surjektiv.

d) Hvilke kombinasjoner av kjernen $\mathsf{Ker}(T)$ og rekkevidden $\mathsf{Ran}(T)$ kan ikke forekomme (avgjør dette uten eksplisitt utregning av $\mathsf{Ker}(T)$ og $\mathsf{Ran}(T)$:

(i) $\mathsf{Ker}(T) = \{0\}$ og $\mathsf{Ran}(T) = \mathsf{Span}(\{1, x, x^2, x^3, x^4\})$.
(ii) $\mathsf{Ker}(T) = \mathsf{Span}(\{1+x+x^2+x^3+x^4\})$ og $\mathsf{Ran}(T) = \mathsf{Span}(\{1, x, 2x^2, 3x^3, 4x^4\})$.
(iii) $\mathsf{Ker}(T) = \mathsf{Span}(\{1 + x^4, x + x^3, x^2\})$ og $\mathsf{Ran}(T) = \mathsf{Span}(\{x, x^2, x^3\})$.

$\boxed{3}$ La $V = \mathbb{P}_4$ være polynomrommet av alle polynomer i en ukjent x av grad høyst 4 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. Både $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ og $\mathcal{B}_2 = \{1, (1 + x), (1 + x)^2, (1 + x)^3, (1 + x)^4\}$ er basis for V som vektorrom over $\mathbb{R}$.

a) Koordinatvektoren for $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ med hensyn på $\mathcal{B}_1$ er:

(i) $(1, 1, 1, 1, 1)$.
(ii) $(1, x, x^2, x^3, x^4)$.
(iii) $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

b) Koordinatvektoren for $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ med hensyn på $\mathcal{B}_2$ er:

(i) $(1, x, x^2, x^3, x^4)$.
(ii) $(1, 1, 1, 1, 1)$.
(iii) $(1, -2, 4, -3, 1)$.

$\boxed{4}$ La $T\colon V \to V$ være en lineærtransformasjon for et vektorrom V der $\dim V = r < \infty$. Hvilke(n) påstand, om noen, skal ut for at alle påstandene skal være ekvivalente:

(i) T er injektiv.

(ii) T er surjektiv.

(iii) T er injektiv og surjektiv.

(iv) T er en isomorfi.

(v) $\mathsf{Ker}(T) = \{0\}$.

(vi) $\mathsf{Ran}(T) = V$.