Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Flervalgsoppgavene 4

Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

$\boxed{1}$ La $V = \mathbb{P}_4$ være polynomrommet av alle polynomer i en ukjent x av grad høyst 4 med koeffisienter i $\mathbb{R}$. La $T\colon V \to V$ være lineærtransformasjonen gitt ved at

$$T(f(x)) = xf'(x)$$

for et polynom $f(x)$ i V, der $f'(x)$ er den deriverte av polynomet $f(x)$ med hensyn til x.

a) La $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \subseteq V$, som er en basis for V som vektorrom over $\mathbb{R}$. Matriserepresentasjonen av T med hensyn til $\mathcal{B}$ er gitt ved:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) La $\mathcal{B}' = \{1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3, (1+x)^4\} \subseteq V$, som er en basis for V som vektorrom over $\mathbb{R}$. Matriserepresentasjonen av T med hensyn til $\mathcal{B}'$ er gitt ved:

(i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ La $\mathcal{B}' = \{(1,1),(-1,1)\}$ i $\mathbb{R}^2$, som er en basis for $\mathbb{R}^2$. La $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ være standardbasisen for $\mathbb{R}^2$.

a) Overgangsmatrisen fra basisen $\mathcal{B}'$ til basisen $\mathcal{B}$ er gitt ved:

(i) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

b) Overgangsmatrisen fra basisen $\mathcal{B}$ til basisen $\mathcal{B}'$ er gitt ved:

(i) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ Hvis vi tenker på elementer/punkter $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ som kolonnevektorer $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Da kan vi tolke/definere

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

for $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, hvor det siste produktet er vanlig matrisemultiplikasjon.

Hvilke av de følgende regnereglene for vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i $\mathbb{R}^n$ og reelle tall s, t i $\mathbb{R}$

(1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}, \qquad \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c},$

(2) $t(\mathbf{a}+\mathbf{b})=t\mathbf{a}+t\mathbf{b}, \qquad t(\mathbf{a}-\mathbf{b})=t\mathbf{a}-t\mathbf{b},$

(3) $(s+t)\mathbf{a}=s\mathbf{a}+t\mathbf{a}, \qquad (s-t)\mathbf{a}=s\mathbf{a}-t\mathbf{a},$

(4) $(t\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(t\mathbf{b})=t(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}),$

(5) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}, \qquad \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c},$

(6) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}, \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$, dvs. $|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}},$

(7) $|t\mathbf{a}|=|t|\cdot|\mathbf{a}|,$

(8) $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|,$

(9) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|,$

følger av regnereglene for matriser A, B og C

(1) $A(B+C)=AB+AC,$

(2) $A(B-C)=AB-AC,$

(3) $(A+B)C=AC+BC,$

(4) $(A-B)C=AC-BC,$

(5) $(AB)C=A(BC),$

(6) $A+B=B+A, \qquad A+(B+C)=(A+B)+C,$

(7) $A(aC)=(aA)C=a(AC)$ hvis a er et reelt tall?

(i) (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9).

(ii) (1), (2), (3), (4), (5).

(iii) (1), (2), (3).

Blir det noen endring når vi tar med regneregler for transponerte av matriser: $(tA)^T = tA^T$ og $(AB)^T = B^TA^T$.

$\boxed{4}$ **a)** La $\mathbf{u}=(1,-2,3)$ og $\mathbf{v}=(2,-1,-3)$ i $\mathbb{R}^3$. Hvor er det regnet feil?

(i) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(3,-3,0)$.

(ii) $2\mathbf{u}-\mathbf{v}=(-1,-3,9)$.

(iii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-5$.

b) La $t\in\mathbb{R}$ og $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ være slik at $(\mathbf{u}-t\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}=0$, og la θ være vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Hva er forholdet mellom $|t\mathbf{v}|$ og $|\mathbf{u}||\cos(\theta)|$:

(i) $|t\mathbf{v}|$ og $|\mathbf{u}||\cos(\theta)|$ er aldri like.

(ii) $|t\mathbf{v}|=|\mathbf{u}||\cos(\theta)|$.

(iii) $|t\mathbf{v}|>|\mathbf{u}||\cos(\theta)|$.