Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4410 Matematikk 2A
Vår 2026

Flervalgsoppgavene 7

Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

$\boxed{1}$ La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Det karakteristiske polynomet til A er lik

(i) $-(\lambda+4)^2(\lambda-6)$
(ii) $-(\lambda+4)(\lambda-3)(\lambda+1)$
(iii) $-(\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda+1)$

b) Kan du allerede nå avgjøre om A er diagonaliserbar?

(i) Ja, siden A er symmetrisk og hver symmetrisk matrise er diagonaliserbar.
(ii) Nei, jeg må sjekke først hvilken dimensjon egenrommene har.

c) Hva er dimensjonen til egenrommet til egenverdi $\lambda = -4$?

(i) 0 (ii) 1 (iii) 2

d) A er diagonaliserbar og kan skrives som $A = PDP^{-1}$, der

(i) $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(iii) $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Det karakteristiske polynomet til A er lik
(i) $-(\lambda+4)^2(\lambda-6)$
(ii) $-(\lambda+4)(\lambda-3)(\lambda+1)$
(iii) $-(\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda+1)$

b) Kan du allerede nå avgjøre om matrisen A er diagonaliserbar?
(i) Ja, siden A er symmetrisk og hver symmetrisk matrise er diagonaliserbar.
(ii) Nei, jeg må sjekke først hvilken dimensjon egenrommene har.

c) Hva er dimensjonen til egenrommet til egenverdi $\lambda = -4$?
(i) 0 (ii) 1 (iii) 2

d) A er diagonaliserbar og kan skrives som $A = PDP^{-1}$, der

(i) $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

(ii) $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

3 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Det karakteristiske polynomet til A er lik
(i) $(\lambda-2)^2$ (ii) $(\lambda-4)(\lambda-2)$ (iii) $(\lambda-2)^2(\lambda-4)$

b) Hva er dimensjonen til egenrommet til egenverdi $\lambda = 2$?
(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

c) Er matrisen A diagonaliserbar?
(i) Ja, siden det finnes minst en egenvektor til egenverdien $\lambda = 2$
(ii) Nei, siden det bare finnes en lineær uavhengig egenvektor til egenverdien $\lambda = 2$.

4 La A være matrisen $A = PDP{-}1$, der

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A^4 er lik

(i) $\begin{bmatrix} 14 & 30 \\ -15 & -31 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 14 & 30 \\ 15 & 31 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -14 & 30 \\ -15 & 31 \end{bmatrix}$

$\boxed{5}$ La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

som kan skrives som $A = PDP^{-1}$, der

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Den generelle løsningen til det lineære systemet $\mathbf{x}'(t) = D\mathbf{x}(t)$ er gitt ved

(i) $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{t} \\ c_2e^{2t} \end{bmatrix}$, der $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{t} \\ c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$, der $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} \\ c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$, der $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Den generelle løsningen til det lineære systemet $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ er gitt ved

(i) $\mathbf{y}(t) = c_1e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, der $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathbf{y}(t) = c_1e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, der $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbf{y}(t) = c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, der $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$

c) Løsningen til det lineære systemet $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ med initialkrav $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ er gitt ved

(i) $\mathbf{y}(t) = -2e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{y}(t) = 4e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{y}(t) = 4e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) Løsningen til differensialligningen

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0$$

med initialkrav $z(0) = 2$ og $z'(0) = 0$ kan skrives som det følgende lineære systemet

(i) $\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{y}(t)$ med initial krav $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{y}(t)$ med initial krav $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{y}(t)$ med initial krav $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$