



Innleveringsfrist: fredag 30.01.2026, kl. 16:00.

Du leverer besvarelsen din som **en pdf-fil**. Innleveringer levert i feil format underkjennes.

Obs: Godkjent betyr at man hadde bestått hvis innleveringen utgjorde en eksamen. Som ved eksamen må alle svar begrunnes. I tillegg må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

1 La $\mathcal{M}_n$ utgjøre vektorrommet av komplekse $n \times n$ -matriser og vis at mengden

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ for } 1 \leq j \leq i \leq n \right\}$$

av nedre triangulære $n \times n$ -matriser er et underrom av $\mathcal{M}_n$.

Hver reell $m \times n$ matrise A definerer en lineærtransformasjon $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ og det gjelder for

- nullrommet til A : $\text{Nul } A = \text{Ker } T$ og en skriver også $\text{Ker } A$ istedenfor $\text{Nul } A$.
- søylerommet til A : $\text{Col } A = \text{Ran } T$ og en skriver også $\text{Ran } A$ istedenfor $\text{Col } A$.

Dessuten betegnes søylerommet til en matrise også som kolonnerommet.

I tillegg til kolonnerommet og nullrommet finnes også radrommet, $\text{Row } A$, til matrisen A , som betegner underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av radvektorene i $m \times n$ matrisen A .

2 Avgjør om vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ligger i $\text{Ker } A$ når

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hva er dimensjonen til $\text{Ran } A$?

- 3 Finn en basis for kolonnerommet, nullrommet og radrommet til følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 14 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 13 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Bestem også dimensjonen til hvert av disse rommene for begge matrisene.

Hvis A er en $m \times n$ matrise, så definerer vi den transponerte A^T av matrisen A til å være $n \times m$ matrisen man får ved å la rad nummer i fra A være søyle nummer i for den nye matrisen A^T .

- 4 La A være en reell 4×5 -matrise. Begrunn svarene på følgende spørsmål.

- a) Hva er maksimal mulig dimensjon til $\text{Ran } A$?
- b) Hvis $\dim(\text{Ker } A) = 2$, hvor mange lineært uavhengige kolonner har A ?
- c) Hvis $A \neq 0$, hva er minste mulige antall lineært uavhengige rader i A ?
- d) Hva er $\dim(\text{Row } A^T)$ når systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har 3 frie parametre?
- e) Kan $\text{Ker } A = \{\mathbf{0}\}$?

- 5 Du får oppgitt at $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er en lineærtransformasjon hvor

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Finn $T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.
- b) Finn ut om T er injektiv og/eller surjektiv.

- 6 Bestem $\text{rank } B$ og $\text{Ker } B$ når B er en $n \times n$ -matrise med $\det B \neq 0$.

- 7 La V utgjøre et (reelt) underrom av de kontinuerlige funksjonene fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ med basis

$$\mathcal{B} = \{1 \text{ (konstantfunksjon)}, \cos x, \cos(2x)\}$$

og la $T: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$T: a + b \cos(x) + c \cos(2x) \mapsto \begin{bmatrix} c \\ 2a + b \\ b - 3c \end{bmatrix}.$$

- a) Vis at $\sin^2(x)$ og $\cos^2(x)$ ligger i V ved å finne koordinatene til disse funksjonene med hensyn på $\mathcal{B}$.

(Hint: *Trigonometriske halvvinkel-formler.*)

- b) Er T en lineærtransformasjon?

- c) Er V isomorf med $\mathbb{R}^3$?

- 8 Anta at $S: W \rightarrow V$ er en invers til en lineærtransformasjon $T: V \rightarrow W$. Per definisjon vil det si at S er en lineærtransformasjon som tilfredsstiller

$$\begin{aligned} S(T(v)) &= v && \text{for alle } v \in V, \text{ og} \\ T(S(w)) &= w && \text{for alle } w \in W. \end{aligned}$$

- a) Hvilken av egenskapene over beskriver at T er injektiv, og hvilken egenskap beskriver at T er surjektiv?

- b) Hva blir $\text{Ran } T$?

- c) Er S en isomorfi mellom W og V ?