



Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4410 Matematikk

2A

Vår 2026

Innlevering 4

Innleveringsfrist: fredag 17.04.2026 kl 16:00.

Du leverer besvarelsen din som en **pdf-fil**. Innleveringer levert i feil format underkjennes.

Obs: Godkjent betyr at man hadde bestått hvis innleveringen utgjorde en eksamen. Som ved eksamen må alle svar begrunnes. I tillegg må du ta med så mye mellomregning at framgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

- 1 For hver av rekkene a) til c) nedenfor skal du avgjøre om rekken konvergerer, absolutt eller betinget, eller divergerer

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2^n}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3 + 1}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \right)^2$

- 2 Nedenfor er gitt fem potensrekker. For hver av rekkene skal du finne det største konvergensintervallet. Husk å sjekke endepunktene i intervallet.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n+1}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$$

d)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x+2)^n$$

e)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n} (2x+5)^n$$

3 a) Bestem taylorrekken om $a = 0$ til funksjonen $f(x) = \ln(1+2x)$. For hvilke x -verdier konvergerer rekken?

b) Bestem taylorrekken om $a = 0$ til funksjonen $f(x) = e^{-x^2/4}$. For hvilke x -verdier konvergerer rekken?

4 a) Bestem taylorrekken om $a = 0$ til funksjonen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. For hvilke x -verdier konvergerer rekken?

b) La $g(x) = \arcsin(x)$. Bruk taylorrekken fra punkt a) til å vise at $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots$ for $-1 < x < 1$. Bruk de tre første leddene i rekken til å finne en tilnærmingverdi for $\pi/6$.

5 a) Bestem taylorrekken om $a = 0$ til funksjonen $E(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. For hvilke x -verdier konvergerer rekken?

b) Hvor mange ledd i rekken må du ta med for å få en verdi av $E(1)$ med feil mindre enn 0.0005?

6 a) Bestem taylorrekken om $a = \frac{1}{2}$ til funksjonen $f(x) = \sin(\pi x)$. Bruk de tre første leddene i rekken til å finne en tilnærmingverdi til $\sin(\frac{3}{5}\pi)$.

b) Bestem taylorrekken om $a = \pi/4$ til funksjonen $f(x) = \cos(x)$. Bruk de tre første leddene i denne rekken til å finne en tilnærmingverdi til $\cos(\frac{43\pi}{180})$.

c) Bruk nå formelen $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ og taylorrekken til $\sin(x)$ og $\cos(x)$ om $a = 0$ til å utlede samme rekke som i punktet ovenfor.

7 La $f(x)$ være en periodisk funksjon med periode 2π gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

a) Vis at fourierrekken til $f(x)$ blir

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

b) Bruk denne rekkeutviklingen til å bestemme summen av rekkene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

- 8 La $f(x)$ være en periodisk funksjon med periode 2π gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Finn fourierrekken til $f(x)$ og bruk den til å bestemme summen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

- 9 Gitt $f(x) = 1 - x$ definert for $x \in [0, 1]$.

- a) Finn fouriersinusrekken til $f(x)$
- b) Skisser grafen til summen av denne rekken på intervallet $[-2, 2]$
- c) Hva er summen til rekken for $x = 0$?

- 10 Funksjonen $g(x)$ er definert på intervallet $(-\pi, \pi)$ slik:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}x - 2, & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{2}{\pi}x + 2, & \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Skisser grafen til $g(x)$.

La $f(x)$ være den periodiske utvidelsen til $g(x)$ med periode 2π , og finn fourierrekken til $f(x)$.