Eksamen TMA4110 høst '24

Oppgave 2
Vi får oppgitt basisen $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ for vektorrommet V og en lineærtransformasjon $T : V \to V$, gitt ved $T(u) = 2u - 4w, T(v) = u + v + w, T(w) = -2u + \frac{1}{2}v$.

a) Hva er matriserepresentasjonen til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$?
Hint: uttrykk u som $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T_{\mathcal{B}}$ og tilsvarende med v og w.

b) Finn $T(u - 3w + 2v)$ uttrykt i koordinater med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

c) Hva er kjernen og bildet til T? Avgjør om T er surjektiv og/eller injektiv.

basis $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

a) $T : V \longrightarrow V$

$$[T]_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{B \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [T(\vec{u})]_B & [T(\vec{v})]_B & [T(\vec{w})]_B \end{bmatrix}$$

$$[T(\vec{u})]_B = [2\vec{u} - 4\vec{w}]_B = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}}$$

$$[T(\vec{v})]_B = [\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}]_B = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$[T(\vec{w})]_B = [-2\vec{u} + \tfrac{1}{2}\vec{v}]_B = \boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}$$

b) $[T(\vec{u} - 3\vec{w} + 2\vec{v})]_B$

$$= [T]_{B \leftarrow B} [\vec{u} - 3\vec{w} + 2\vec{v}]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1/2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

c) $\operatorname{Ker} T = \{ \vec{x} \in V \mid \underbrace{T(\vec{x}) = \vec{0}}_{} \}$ $\quad \vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}$

$$\underbrace{[T]_{B \leftarrow B} [\vec{x}]_B = [\vec{0}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Tenk: } A\vec{x} = \vec{0}}$$

Gauss-elim. $[T]_{B\leftarrow B}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -11/2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T(\vec{x}) = \vec{0} \iff [\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(A\bar{x} = \vec{0} \iff \vec{x} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Ker} T = \{\vec{0}\}} \leftarrow T \text{ injektiv}$$

- $\operatorname{Ran} T = \left\{ \vec{y} \in V \,\middle|\, \underbrace{\vec{y} = T(\bar{x})}\ \text{for } \vec{x} \in V \right\}$

$$\iff \underbrace{[\vec{y}]_B = [T]_{B\leftarrow B}[\vec{x}]_B}_{\text{Tenk: } \vec{y} = A\vec{x}}$$

T surjektiv

Ser at $[\vec{y}]_B = [T]_{B\leftarrow B}[\vec{x}]_B$ har en løsning for alle $[\bar{y}]_B$, så $\boxed{\operatorname{Ran} T = V}$

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(\vec{u})]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{w})]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ basis

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

$$\vec{y} = T(\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{y}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

T er injektiv og surjektiv.

Oppgave 7

La $\mathcal{M}_2$ være vektorrommet bestående av alle reelle 2×2–matriser, altså

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

og la $\mathcal{P}_3$ være vektorrommet bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 3.

(a) Vis at

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for $\mathcal{M}_2$ (dette er standardbasisen for $\mathcal{M}_2$).

La $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$ være standardbasisen for $\mathcal{P}_3$, og la $T\colon \underset{\mathcal{B}}{\mathcal{M}_2} \to \underset{\mathcal{C}}{\mathcal{P}_3}$ være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 2a + (b-d)x - (a+c)x^2 + (a+b-c-d)x^3.$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2 - x^2 + x^3$$

(b) Finn standardmatrisen A til lineærtransformasjonen T.

(c) Finn en basis for bildet til T og en basis for kjernen til T.

(d) Er T surjektiv? Er T injektiv?

a) $$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \leftarrow \text{vilkårlig element i } \mathcal{M}_2$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{B}$ spenner $\mathcal{M}_2$

- lineært uavh.: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow a = b = c = d = 0$

b)

$$[T]_{C \leftarrow B} = \left[\left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right]_C \quad \left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right]_C \quad \cdots \right]$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right]_C = \Big[\overbrace{2 - x^2 + x^3}^{2 \cdot 1 + 0 \cdot x + (-1) x^2 + 1 \cdot x^3} \Big]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \right]_C = \left[x + x^3 \right]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$$[T]_{C \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} =: A$$

c) Finner basis til Col A:

$$A \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kolonner med pivot-elementer ($\neq 0$)

tilsvarende kolonner i A er en basis for Col A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_C \qquad \left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_C \qquad \ldots$$

$$\Rightarrow \left\{ T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \right\}$$

er en basis for Ran T

altså: $\{2 - x^2 + x^3, \; x + x^3, \; -x^2 - x^3\}$

- Ker T ? Finn basis for Nul A

$$\text{Nul } A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$= \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \vec{x} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\; t \in \mathbb{R}\right\}$$

$\rightarrow$ basis $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ koordinatvektoren til $1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ er en basis for Ker T

d) $\text{Ker } T \neq \{\vec{0}\}$, så T er <u>ikke</u> injektiv.

$\text{Ran } T \neq \mathbb{P}_3$, siden

$\dim(\text{Ran } T) = 3 < \dim \mathbb{P}_3 = 4$

$\Rightarrow$ T er <u>ikke</u> surjektiv.