Eksamen TMA4110 høst '24

Oppgave 2
Vi får oppgitt basisen $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ for vektorrommet V og en lineærtransformasjon $T : V \to V$, gitt ved $T(u) = 2u - 4w, T(v) = u + v + w, T(w) = -2u + \frac{1}{2}v$.

a) Hva er matriserepresentasjonen til T med hensyn på basisen $\mathcal{B}$?
Hint: uttrykk u som $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}^{T}$ *og tilsvarende med v og w.*

b) Finn $T(u - 3w + 2v)$ uttrykt i koordinater med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

c) Hva er kjernen og bildet til T? Avgjør om T er surjektiv og/eller injektiv.

Eksamen TMA4110 kont. '21

Oppgave 7

La $\mathcal{M}_2$ være vektorrommet bestående av alle reelle 2×2–matriser, altså

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

og la $\mathcal{P}_3$ være vektorrommet bestående av polynomer av grad mindre enn eller lik 3.

(a) Vis at

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for $\mathcal{M}_2$ (dette er standardbasisen for $\mathcal{M}_2$).

La $\mathcal{C} = (1, x, x^2, x^3)$ være standardbasisen for $\mathcal{P}_3$, og la $T \colon \mathcal{M}_2 \to \mathcal{P}_3$ være lineærtransformasjonen gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = 2a + (b - d)x - (a + c)x^2 + (a + b - c - d)x^3.$$

(b) Finn standardmatrisen A til lineærtransformasjonen T.

(c) Finn en basis for bildet til T og en basis for kjernen til T.

(d) Er T surjektiv? Er T injektiv?