Eksamen TMA4115 vår '10

Oppgave 7.

La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Finn en matrise P og en diagonal matrise D slik at $A = PDP^{-1}$. Kan P velges slik at $P^T = P^{-1}$?

c) Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \\ y_3' &= y_1 + 2y_3 \end{aligned}$$

med initialbetingelse $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = -2$.

a) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda)\underline{(2-\lambda)}^2 - 2\underline{(2-\lambda)}$ felles faktor

$= \underline{(2-\lambda)}(\lambda-4)(\lambda-1)$

$\Rightarrow$ egenverdier $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$

Egenvektorer:

• $\underline{\lambda_1 = 2}$:

$A - 2I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Kan alltid løses med Gauss-elim.

alternativ: "stirremetoden"

• $\underline{\lambda_2 = 4}$:

$A - 4I$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

• $\underline{\lambda_3 = 1}$:

$A - 1 \cdot I$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

b) Vet fra teorien om diagonalisering at

$A = \underline{P} D \underline{P}^{-1}$ med

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og $\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$\underline{P}$ kan velges ortogonal ($\underline{P}^T = \underline{P}^{-1}$) siden A er symmetrisk.

c) $$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Den generelle løsningen er:

$$\bar{y}(t) = a_1 e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + a_2 e^{4t}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + a_3 e^{t}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

- startverdi: $\bar{y}(0) = \begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix}$

$$a_1\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 1 & -1\\-1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix}$$

stime: $\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & 1 & 3\\1 & 1 & -1 & 2\\-1 & 1 & -1 & -2\end{array}\right] \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

Løsningen på startverdiproblemet er

$$\bar{y}(t) = 2e^{2t}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} + e^{4t}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + e^{t}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

Eksamen TMA4110 høst '08

Oppgave 7 Anta matrisen A har egenverdi λ med 1-dimensjonalt egenrom E_λ, og at matrisen B oppfyller $AB = BA$. Vis at om $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, så er $B\mathbf{x} = k\mathbf{x}$ for en konstant k (dvs. $\mathbf{x}$ er også en egenvektor for B).

Vet: $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$, $\dim E_\lambda = 1$, $AB = BA$

Vil vise: Det finnes en konstant k ($k \in \mathbb{R}$ eller $k \in \mathbb{C}$) slik at $B\bar{x} = k\bar{x}$.

- $\underline{A(B\bar{x})} = BA\bar{x} = B(\lambda\bar{x}) = \underline{\lambda(B\bar{x})}$

  $\Rightarrow B\bar{x} \in E_\lambda$

- $\dim E_\lambda = 1$ og $\vec{x} \neq \vec{0}$ kan anta fordi $\underset{\bar{0}}{\overset{}{B\bar{0}}} = \underset{\bar{0}}{k\bar{0}}$

  $\Rightarrow E_\lambda = \text{Span}\{\bar{x}\}$

  $E_\lambda \ni B\bar{x}$

  $\Rightarrow$ Det finnes k slik at $B\bar{x} = k\bar{x}$.

Eksamen TMA4115 vår '18

Oppgave 6 **(Egenverdier og egenvektorer)**

a) Fullfør utsagnet til en definisjon: "Et tall λ er en **egenverdi** til en kvadratisk (square) matrise A dersom..."

b) Finn en matrise A slik at

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egeneverdi 2, og

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A med egenverdi 3.

a)... det finnes $\bar{x} \neq \bar{0}$ slik at $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$.

b) A er en 2x2-matrise med 2 egenverdier, så vi kan diagonalisere A:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

med $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det P = 3-2 = 1$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$