TMA4411 Matematikk 2B
Vår 2026

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Flervalgsoppgavene 2

Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

$\boxed{1}$ La M være matrisen gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

over $\mathbb{R}$. Den reduserte trappeformen av M er

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Hvilke av de tre mengdene av vektorer i $\mathbb{R}^4$ er en basis for radrommet til M:

(i) $\{(1, 0, 0, 1/3), (0, 1, 0, -5/3), (0, 0, 1, -1/3)\}$

(ii) $\{(0, 0, 3, -1), (3, 0, 0, 1), (0, 3, 0, -5)\}$

(iii) $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$

b) Hvilke av de tre mengdene av vektorer i $\mathbb{R}^4$ er en basis for kolonnerommet til M:

(i) $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(ii) $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(iii) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

c) Hvilke av de tre mengdene av vektorer i $\mathbb{R}^4$ er en basis for nullrommet til M:

(i) $\left\{\begin{bmatrix}-1/3\\5/3\\1/3\\1\end{bmatrix}\right\}$ (ii) $\left\{\begin{bmatrix}-1\\5\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$ (iii) $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1/3\\5/3\\1/3\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\boxed{2}$ La V være et vektorrom med to underrom W_1 og W_2.

a) Hvilke av de følgende delmengdene av V er alltid et underrom av V:

(i) $W_1 + W_2 = \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$.

(ii) $W_1 \cup W_2 = \{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} \in W_1 \text{ eller } \mathbf{w} \in W_2\}$.

(iii) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{w} \in V \mid \mathbf{w} \in W_1 \text{ og } \mathbf{w} \in W_2\}$.

b) La $\mathcal{B}_1$ og $\mathcal{B}_2$ være basis for henholdsvis W_1 og W_2. Er følgende utsagn sant: Hvis $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, så er $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ en basis for $W_1 + W_2$.

$\boxed{3}$ La

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

a) Hva er karakteristisk polynom til matrisen A?

(i) $(2-\lambda)^3$.

(ii) $8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$.

(iii) $8 - 4\lambda + 2\lambda^3$.

b) Hvor mange lineært uavhengige egenvektorer har A?

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

$\boxed{4}$ **Husk:** En $n \times n$ matrise M er *symmetrisk* hvis

$$M = M^T = \textit{den transponerte matrisen av } M.$$

La M være en symmetrisk $n \times n$-matrise over $\mathbb{R}$ og $r \in \mathbb{R}$.

a) Hvilke av de følgende matriser er symmetrisk?

(i) $M + M^T$

(ii) MM^T

(iii) rM

b) La M være en symmetrisk 3×3-matrise. Hvis det fins en invertibel 3×3-matrise P slik at

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Da kan en vise at 3 er en egenverdi for M. Hva er dimensjonen til egenrommet for egenverdien 3?

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3