



Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

- 1 La $V = \mathbb{P}_4$ være polynomrommet av alle polynomer i en ukjent x av grad høyst 4 med koeffisienter i \mathbb{R} . La $T: V \rightarrow V$ være lineærtransformasjonen gitt ved at

$$T(f(x)) = xf'(x)$$

for et polynom $f(x)$ i V , der $f'(x)$ er den deriverte av polynomet $f(x)$ med hensyn til x .

- a) La $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\} \subseteq V$, som er en basis for V som vektorrom over \mathbb{R} . Matriserepresentasjonen av T med hensyn til \mathcal{B} er gitt ved:

$$(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- b) La $\mathcal{B}' = \{1, (1+x), (1+x)^2, (1+x)^3, (1+x)^4\} \subseteq V$, som er en basis for V som vektorrom over \mathbb{R} . Matriserepresentasjonen av T med hensyn til \mathcal{B}' er gitt ved:

$$(i) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

2 La $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ i \mathbb{R}^2 , som er en basis for \mathbb{R}^2 . La $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ være standardbasisen for \mathbb{R}^2 .

a) Overgangsmatrisen fra basisen \mathcal{B}' til basisen \mathcal{B} er gitt ved:

$$(i) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

b) Overgangsmatrisen fra basisen \mathcal{B} til basisen \mathcal{B}' er gitt ved:

$$(i) \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3 Hvis vi tenker på elementer/punkter \mathbf{x} i \mathbb{R}^n som kolonnevektorer $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Da kan

vi tolke/definere

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

for $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, hvor det siste produktet er vanlig matrisemultiplikasjon.

Hvilke av de følgende regnereglene for vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} i \mathbb{R}^n og reelle tall s , t i \mathbb{R}

- (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$,
- (2) $t(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, $t(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = t\mathbf{a} - t\mathbf{b}$,
- (3) $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$, $(s - t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} - t\mathbf{a}$,
- (4) $(t\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (t\mathbf{b}) = t(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,
- (5) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$,
- (6) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, dvs. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$,
- (7) $|t\mathbf{a}| = |t| \cdot |\mathbf{a}|$,
- (8) $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$,
- (9) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$,

følger av regnereglene for matriser A , B og C

- (1) $A(B + C) = AB + AC$,
 - (2) $A(B - C) = AB - AC$,
 - (3) $(A + B)C = AC + BC$,
 - (4) $(A - B)C = AC - BC$,
 - (5) $(AB)C = A(BC)$,
 - (6) $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$,
 - (7) $A(aC) = (aA)C = a(AC)$ hvis a er et reelt tall?
- (i) (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9).
 - (ii) (1), (2), (3), (4), (5).
 - (iii) (1), (2), (3).

Blir det noen endring når vi tar med regneregler for transponerte av matriser: $(tA)^T = tA^T$ og $(AB)^T = B^T A^T$.

- 4** a) La $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$ og $\mathbf{v} = (2, -1, -3)$ i \mathbb{R}^3 . Hvor er det regnet feil?
- (i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, -3, 0)$.
 - (ii) $2\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, -3, 9)$.
 - (iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -5$.
- b) La $t \in \mathbb{R}$ og \mathbf{u} , \mathbf{v} i $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ være slik at $(\mathbf{u} - t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$, og la θ være vinkelen mellom \mathbf{u} og \mathbf{v} . Hva er forholdet mellom $|t\mathbf{v}|$ og $|\mathbf{u}| \cos(\theta)$:
- (i) $|t\mathbf{v}|$ og $|\mathbf{u}| \cos(\theta)$ er aldri like.
 - (ii) $|t\mathbf{v}| = |\mathbf{u}| \cos(\theta)$.
 - (iii) $|t\mathbf{v}| > |\mathbf{u}| \cos(\theta)$.