TMA4411 Matematikk 2B

Vår 2026

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Flervalgsoppgavene 5

Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

$\boxed{1}$ La V være et vektorrom med et indreprodukt $\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være tre vektorer i V, der

(i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1$
(ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = -1$
(iii) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 2$

a) Hva er $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle$?
(i) 1
(ii) 2
(iii) 0

b) Hva er $\langle \mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$?
(i) 0
(ii) $\frac{1}{2}$
(iii) $-\frac{1}{2}$

c) Hvilke par av vektorer er ortogonale?
(i) $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$
(ii) $\mathbf{u}$ og $-2\mathbf{v} + \mathbf{w}$
(iii) $\mathbf{u}$ og $2\mathbf{v} - \mathbf{w}$

$\boxed{2}$ La V være et vektorrom med et indreprodukt $\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. La $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være tre vektorer i V, der

(i) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 1$
(ii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 1$
(iii) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = -1$
(iv) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$
(v) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = -2$
(vi) $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 1$

a) Hva er lengden til $\mathbf{u} + \mathbf{v}$?
(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

b) Hva er lengden til $-3\mathbf{u}$?
(i) -3 (ii) 9 (iii) 3

c) Hva er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$?
(i) 0 (ii) $\pi/3$ (iii) $\pi/2$

$\boxed{3}$ La V være et vektorrom med dimension 4 med et indreprodukt $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, og la $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\} \subset V$.

a) Hva betyr det at $\mathcal{B}$ er en ortonormal mengde?

(i) $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = 0$ for alle i og j i $\{1, 2, 3, 4\}$ og normen/lengden til $\mathbf{b}_i$ er lik 1 for all i.

(ii) $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = 0$ for alle i og j i $\{1, 2, 3, 4\}$ med $i \leq j$ og normen/lengden til $\mathbf{b}_i$ er lik 1 for all i.

(iii) $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = 0$ for alle i og j i $\{1, 2, 3, 4\}$ med $i < j$ og normen/lengden til $\mathbf{b}_i$ er lik 1 for all i.

b) La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ være en ortonormal mengde i V. La $\mathbf{v}$ være i V med $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1, -2, 3, -1)$. Hva er $\langle \mathbf{v}, \mathbf{b}_2 \rangle$?

(i) 1
(ii) -2
(iii) 3

c) Normen til $\mathbf{u} = 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_4$ er lik

(i) -1
(ii) 3
(iii) 9

$\boxed{4}$ Let $\mathbb{P}_\infty$ være vektorrommet over $\mathbb{R}$ av alle polynomer med reelle koeffisienter med et indreprodukt gitt ved

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

for to polynomer $f(x)$ og $g(x)$.

a) Er $\mathcal{S} = \{1, x, -\frac{1}{3} + x^2\}$ en

(i) ortogonal mengde?
(ii) ortonormal mengde?
(iii) ingen av delene?

b) Er $\mathcal{S} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x^2\}$ en

(i) ortogonal mengde?
(ii) ortonormal mengde?
(iii) ingen av delene?