



Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

1 La

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

være vektorrommet av polynomer i en variable x med koeffisienter i \mathbb{R} av høyst grad 3 med et indreprodukt $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved at

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx$$

for to polynomer $f(x)$ og $g(x)$ i V . Mengden $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ er en basis for V .

a) Hvilken av de følgende mengdene er konstruert ved hjelp av Gram-Schmidt-prosessen med start vektor 1?

- (i) $\{1, x, x^2, x^3\}$
- (ii) $\{1, x, x^2 - \frac{4}{3}, x^3 - \frac{12}{5}x\}$
- (iii) $\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}x, \frac{3\sqrt{5}}{8}(x^2 - \frac{4}{3}), \frac{5\sqrt{7}}{16}(x^3 - \frac{12}{5}x)\}$

b) La W være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner på intervallet $[-2, 2]$ med det samme indreproduktet som for V . Hva er projeksjonen av $\cos(x)$ ned på underrommet V av W ?

- (i) $0.45465 + 0.077004x^2$
- (ii) $0.45465 + 0.44374x^2$
- (iii) $0.45465 - 0.44374 \frac{3\sqrt{5}}{8}(x^2 - \frac{4}{3})$

2 La W være et vektorrom med et indreprodukt $\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ og et underrom $V \subseteq W$ slik at $\{0\} \neq V$ og $V \neq W$. La $P : W \rightarrow W$ være projeksjonen av W ned på V , dvs. $P(\mathbf{w}) = \text{proj}_V(\mathbf{w})$ for alle $\mathbf{w} \in W$.

a) Hva er rekkevidden til lineærtransformasjonen P ?

- (i) W
- (ii) V
- (iii) $\{\mathbf{0}\}$

- b) Hva er kjernen til P ?
- (i) $\text{Ker}(P) = \{\mathbf{u} \in W \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in V\}$
 - (ii) $\text{Ker}(P) = V^\perp$
 - (iii) $\text{Ker}(P) = \{\mathbf{0}\}$
- c) Hvis $\dim W = 4$ and $\dim V = 3$, da har to vektorer \mathbf{w}_1 og \mathbf{w}_2 i W med $P(\mathbf{w}_1) = P(\mathbf{w}_2)$ egenskapen at
- (i) $\mathbf{w}_1 - P(\mathbf{w}_1)$ og $\mathbf{w}_2 - P(\mathbf{w}_2)$ er alltid nullvektorer.
 - (ii) $\mathbf{w}_1 - P(\mathbf{w}_1)$ og $\mathbf{w}_2 - P(\mathbf{w}_2)$ er alltid ortogonale.
 - (iii) $\mathbf{w}_1 - P(\mathbf{w}_1)$ og $\mathbf{w}_2 - P(\mathbf{w}_2)$ er alltid parallelle.

3 La W være et vektorrom med et indreprodukt $\langle -, - \rangle : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ og et endelig-dimensjonalt underrom $V \subseteq W$. La $P : W \rightarrow W$ være projeksjonen av W ned på V , dvs. $P(\mathbf{w}) = \text{proj}_V(\mathbf{w})$ for alle $\mathbf{w} \in W$.

- a) For $\mathbf{w} \in W$ hva er avstanden $\|\mathbf{w} - P(\mathbf{w})\|$?
- (i) minste mulige av alle $\|\mathbf{w} - \mathbf{u}\|$ for alle $\mathbf{u} \in V^\perp$.
 - (ii) minste mulige av alle $\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$ for alle $\mathbf{v} \in V$.
 - (iii) minste mulige av alle $\|\mathbf{w} - 2\mathbf{v}\|$ for alle $\mathbf{v} \in V$.
- b) Hva er lineærtransformasjonen $P^2 = P \circ P$?
- (i) 0
 - (ii) identitetsavbildningen fra W til W
 - (iii) P
- c) For $\mathbf{w} \in W$, hvilket uttrykk nedenfor skriver \mathbf{w} , som en sum av et element fra V og et element fra V^\perp ?
- (i) $P(\mathbf{w}) + (\mathbf{w} - P(\mathbf{w}))$
 - (ii) $2P(\mathbf{w}) + (\mathbf{w} - 2P(\mathbf{w}))$
 - (iii) $-P(\mathbf{w}) + (\mathbf{w} + P(\mathbf{w}))$

4 La V være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ med indreprodukt

$$\langle g(x), h(x) \rangle = \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx.$$

Mengden $S = \{\sin(n\pi x), \cos(n\pi x)\}_{n=1}^{10}$ er en ortonormal mengde av vektorer i V , spesielt lineært uavhengige. La U være underrommet av V utspent av vektorene i S .

La $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leq x \leq 0, \\ -x + 1, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

Vi har at

$$\int_{-1}^0 (x + 1) \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 (-x + 1) \sin(n\pi x) dx = 0$$

og

$$\int_{-1}^0 (x + 1) \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 (-x + 1) \cos(n\pi x) dx = \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - \cos(n\pi))$$

a) Prosjeksjonen av $f(x)$ ned på $\sin(\pi x)$ er lik

(i) 0

(ii) $\frac{4}{\pi^2} \sin(\pi x)$

(iii) $\frac{4}{\pi^2} \cos(\pi x)$

b) Prosjeksjonen av $f(x)$ ned på $\cos(\pi x)$ er lik

(i) 0

(ii) $\frac{2}{\pi^2} \cos(\pi x)$

(iii) $\frac{4}{\pi^2} \cos(\pi x)$

c) Prosjeksjonen av $f(x)$ ned på U er lik

(i) $\frac{4}{\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{4}{3\pi^2} \cos(3\pi x) + \frac{4}{5\pi^2} \cos(5\pi x) + \frac{4}{7\pi^2} \cos(7\pi x) + \frac{4}{9\pi^2} \cos(9\pi x)$

(ii) $\frac{4}{\pi^2} \cos(\pi x) + \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi x) + \frac{4}{25\pi^2} \cos(5\pi x) + \frac{4}{49\pi^2} \cos(7\pi x) + \frac{4}{81\pi^2} \cos(9\pi x)$

(iii) $\frac{4}{4\pi^2} \cos(2\pi x) + \frac{4}{16\pi^2} \cos(4\pi x) + \frac{4}{36\pi^2} \cos(6\pi x) + \frac{4}{64\pi^2} \cos(8\pi x) + \frac{4}{100\pi^2} \cos(10\pi x)$