



Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

1 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Det karakteristiske polynomet til A er lik

- (i) $-(\lambda + 4)^2(\lambda - 6)$
- (ii) $-(\lambda + 4)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$
- (iii) $-(\lambda - 4)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$

b) Kan du allerede nå avgjøre om A er diagonaliserbar?

- (i) Ja, siden A er symmetrisk og hver symmetrisk matrise er diagonaliserbar.
- (ii) Nei, jeg må sjekke først hvilken dimensjon egenrommene har.

c) Hva er dimensjonen til egenrommet til egenverdi $\lambda = -4$?

- (i) 0
- (ii) 1
- (iii) 2

d) A er diagonaliserbar og kan skrives som $A = PDP^{-1}$, der

- (i) $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
- (ii) $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
- (iii) $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

- a) Det karakteristiske polynomiet til A er lik
- (i) $-(\lambda + 4)^2(\lambda - 6)$
 - (ii) $-(\lambda + 4)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$
 - (iii) $-(\lambda - 4)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$
- b) Kan du allerede nå avgjøre om matrisen A er diagonaliserbar?
- (i) Ja, siden A er symmetrisk og hver symmetrisk matrise er diagonaliserbar.
 - (ii) Nei, jeg må sjekke først hvilken dimensjon egenrommene har.
- c) Hva er dimensjonen til egenrommet til egenverdi $\lambda = -4$?
- (i) 0
 - (ii) 1
 - (iii) 2
- d) A er diagonaliserbar og kan skrives som $A = PDP^{-1}$, der
- (i) $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
 - (ii) $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$
 - (iii) $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ og $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

3 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Det karakteristiske polynomiet til A er lik
- (i) $(\lambda - 2)^2$
 - (ii) $(\lambda - 4)(\lambda - 2)$
 - (iii) $(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$
- b) Hva er dimensjonen til egenrommet til egenverdi $\lambda = 2$?
- (i) 1
 - (ii) 2
 - (iii) 3
- c) Er matrisen A diagonaliserbar?
- (i) Ja, siden det finnes minst en egenvektor til egenverdien $\lambda = 2$
 - (ii) Nei, siden det bare finnes en lineær uavhengig egenvektor til egenverdien $\lambda = 2$.

4 La A være matrisen $A = PDP^{-1}$, der

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A^4 er lik

- (i) $\begin{bmatrix} 14 & 30 \\ -15 & -31 \end{bmatrix}$
- (ii) $\begin{bmatrix} 14 & 30 \\ 15 & 31 \end{bmatrix}$
- (iii) $\begin{bmatrix} -14 & 30 \\ -15 & 31 \end{bmatrix}$

5 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

som kan skrives som $A = PDP^{-1}$, der

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Den generelle løsningen til det lineære systemet $\mathbf{x}'(t) = D\mathbf{x}(t)$ er gitt ved

(i) $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$, der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}$, der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}$, der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Den generelle løsningen til det lineære systemet $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ er gitt ved

(i) $\mathbf{y}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) $\mathbf{y}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbf{y}(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, der $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) Løsningen til det lineære systemet $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ med initialkrav $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ er gitt ved

(i) $\mathbf{y}(t) = -2e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{y}(t) = 4e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{y}(t) = 4e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

d) Løsningen til differensialligningen

$$z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = 0$$

med initialkrav $z(0) = 2$ og $z'(0) = 0$ kan skrives som det følgende lineære systemet

(i) $\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$ med initial krav $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$ med initial krav $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$ med initial krav $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$