Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Flervalgsoppgavene 8

Flervalgsoppgavene er frivillige, men er pensum og er anbefalt, som en støtte for læring.

Obs: Disse oppgavene kan også formuleres som langsvarsoppgaver. I dette tilfellet må, ved eksamen, alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

$\boxed{1}$ Betrakt differensialligningen

$$y'(t) = f(t, y(t)) = (ty(t))^2 - y$$

med initialkrav $y(1) = 1$. Approksimer løsningen $y(t)$ ved å bruke den følgende numeriske metoden med skrittlengde $h = 0.1$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$

der

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, u_n), \\ k_2 &= f(t_n + h, u_n + hk_1). \end{aligned}$$

a) u_1 er lik

(i) $u_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, u_0) + f(t_0, u_0 + hf(t_0, y_0)))$

(ii) $u_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, u_0) + f(t_0 + h, u_0 + hf(t_0, u_0)))$

(iii) $u_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, u_0 + h) + f(t_0, u_0 + hf(t_0, y_0)))$

b) $y(1,2)$ er tilnærmet lik

(i) $1,0105$ (ii) $0,5036$ (iii) $1,0469$

$\boxed{2}$ Gitt en glatt funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, betrakt differensialligningen

$$y'(t) = f(y(t))$$

med initialkrav $y(t_0) = y_0$. Approksimer løsningen $y(t)$ ved å bruke den følgende numeriske metoden med skrittlengde h,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{5}f(u_n) + \frac{4h}{5}f(u_{n+1}) = g(u_n, u_{n+1}).$$

a) La $y_n = y(t_n)$, da er den lokale avbruddsfeilen $\tau_n(h) = \frac{y_n - u_n^*}{h}$, der $u_n* = g(y_{n-1}, y_n)$, gitt ved

(i) $\frac{1}{h}(y_n - y_{n-1} - hf(y_{n-1}))$

(ii) $\frac{1}{h}(y_n - y_{n-1} - \frac{h}{5}f(y_{n-1}) - \frac{4h}{5}f(y_n))$

b) Den globale avbruddsfeilen $\tau(h)$ er av orden

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

c) Metoden er av orden

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

$\boxed{3}$ Gitt en glatt funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, betrakt differensialligningen

$$y'(t) = f(y(t))$$

med initialkrav $y(t_0) = y_0$.

Approksimer løsningen $y(t)$ ved å bruke den følgende numeriske metoden med skrittlengde h,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}f(u_n) + \frac{3h}{4}f(u_n + \frac{2h}{3}f(u_n)) = g(u_n).$$

a) La $y_n = y(t_n)$, da er den lokale avbruddsfeilen $\tau_n(h) = \frac{y_n - u_n^*}{h}$, der $u_n^* = g(y_{n-1})$, gitt ved

(i) $\frac{1}{h}(y_n - y_{n-1} - \frac{h}{4}f(y_{n-1}) - \frac{3h}{4}f(y_{n-1} + \frac{2h}{3}f(y_{n-1})))$

(ii) $\frac{1}{h}(y_n - y_{n-1} - \frac{h}{4}f(y_{n-1}) - \frac{3h}{4}f(y_{n-1} + \frac{2h}{3}f(y_n)))$

b) Den globale avbruddsfeilen $\tau(h)$ er av orden

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

c) Metoden er av orden

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

$\boxed{4}$ Gitt en differensialligning

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

med initialkrav $y(0) = 0$ sammen med koden

In [ ]:

```
def NM(odefile, iv, h, N):
    solNM=np.zeros((iv.size, N+1))
    solNM[:,0]= iv
    t0=0.0
    tt=np.zeros(N+1)
    for n in range(N):
        tn=t0+n*h
        sol_o=solNM[:,n]
        k1=odefile(tn,sol_o)
        k2=odefile(tn+2/3*h,sol_o+2/3*h*k1)
        sol_n=sol_o+1/4*h*k1+3/4*h*k2
        solNM[:,n+1]=sol_n
        tt[n+1]=tn+h
    return solNM,tt
```

Hvilken av de følgende numeriske metodene beskriver koden?

(i) $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4} f(t_n, u_n) + \frac{3h}{4} f(t_n, u_n + \frac{2h}{3} f(t_n, u_n))$

(ii) $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4} f(t_n, u_n) + \frac{3h}{4} f(t_n + \frac{2h}{3}, u_n + \frac{2h}{3} f(t_n, u_n))$

(iii) $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4} f(t_n + h, u_n) + \frac{3h}{4} f(t_n + \frac{2h}{3}, u_n + \frac{2h}{3} f(t_n, u_n))$