



Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4411 Matematikk
2B

Vår 2026

Innlevering 2

Innleveringsfrist: fredag 20.02.2026, kl. 16:00.

Du leverer besvarelsen din som **en pdf-fil**. Innleveringer levert i feil format underkjennes.

Obs: Godkjent betyr at man hadde bestått hvis innleveringen utgjorde en eksamen. Som ved eksamen må alle svar begrunnes. I tillegg, må du ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig fram fra besvarelsen din.

- 1 La $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ og $C = \{(1, 2, 1), (2, 5, 0), (3, 3, 8)\}$. Finn $[\text{id}]_{C \leftarrow B}$, overgangsmatrisen fra basisen B til basisen C .

- 2 La

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Finn projeksjonen $\text{proj}_V \mathbf{u}$ av vektoren $\mathbf{u}$ på underrommet $V = \text{Span}\{\mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^3$.
b) Hva blir $\text{proj}_V(\text{proj}_V(\mathbf{u}))$?
c) Avstanden mellom en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ og underrommet $V \subset \mathbb{R}^3$ er gitt ved

$$d(\mathbf{x}, V) = \min_{\mathbf{v} \in V} \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|,$$

Beregn avstanden mellom $\mathbf{u}$ og V .

- 3 La $W = \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, der

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Finn en ortogonal basis for W .
b) La $P_W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være projeksjonsavbildningen ned på W , som er definert ved $P(\mathbf{x}) = \text{proj}_W \mathbf{x}$. Finn $[P_W] = [P_W]_B$, matriserepresentasjonen til projeksjonen P_W , der B betegner standardbasen for $\mathbb{R}^3$.
c) Finnes det en 3×2 -matrise A slik at $[P_W]A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$? I så fall, finn den.

Hint: Tenk geometrisk her.

- 4 La Q være en såkalt ortogonal $n \times n$ -matrise, dvs. kolonnene utgjør en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

- a) Regn ut $Q^\top Q$ og bestem Q^{-1} .
 b) Vis at mulige verdier til $\det Q$ er bare ± 1 .

- 5 La U være underrommet av $\mathbb{R}^4$ utspent av vektorene

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Finn en ortogonal basis for U ved hjelp av Gram-Schmidt-prosessen.
 b) La $P_U : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ være projeksjonsavbildningen ned på U , som er definert ved $P(\mathbf{x}) = \text{proj}_U \mathbf{x}$. Finn $[P_U] = [P_U]_B$, matriserepresentasjonen til projeksjonen P_U , der B betegner standardbasen for $\mathbb{R}^4$.
 c) Hva er $\dim U^\perp$?
 d) Finn en basis for $U^\perp$, det ortogonale komplementet til U i $\mathbb{R}^4$.

- 6 La U være en delmengde av et indreproduktrom V . Vis at det ortogonale komplementet

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u \rangle = 0 \text{ for alle } u \in U\}$$

er et underrom av V .

- 7 La $C([0, 1])$ være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ utstyrt med indreproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

- a) Avgjør om funksjonene x og $\frac{1}{x^2 + 1}$ er ortogonale i $C([0, 1])$.
 b) Finn en ortogonal basis for $\text{Sp}\{1, x^2, x^4\}$.
 c) Beregn normen

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right\|.$$

Vink: $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan(x) + C.$

- 8 La $C([0, 1])$ være vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ utstyrt med indreproduktet.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

a) Regn ut vinkelen mellom

(i) x og $\cos x$

(ii) x og $\sin x$.

Hvilken vinkel er minst?

b) Regn ut avstanden mellom

(i) x og $\cos x$

(ii) x og $\sin x$.

Hvilken avstand er minst?

Hint: Husk at avstanden mellom to vektorer f og g er lik normen til $f - g$.