Plenumsregning uke 3

1) Ligger $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i span $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$?

Omformulér: Finnes $a, b \in \mathbb{R}$ slik at $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$?
Evt: Er $\vec{x}$ en linear kombinasjon av $\vec{u}$ og $\vec{v}$?

Dette gir likningssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{aligned} 2a + 3b &= 1 \\ -a + 0 &= 1 \\ 4a - b &= -2 \end{aligned}$$

Som totalmatrise:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{gathered} 3b = 3 \\ \text{og} \\ -b = 2 \end{gathered}$$

$\Rightarrow$ Altså ingen løsning

Geometrisk: $\vec{x}$ ligger ikke i planet spent ut av $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

Så: Nei, $\vec{x}$ ligger ikke i spennet til $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$ lineært uavhengige.

Altså: hvis $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ så må $a = b = c = 0$

Ønsker å vise at $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$ og $\vec{u}+\vec{w}$ er lineært uavhengige, altså <u>gitt</u> $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) + \beta(\vec{v}+\vec{w}) + \gamma(\vec{u}+\vec{w}) = \vec{0}$ så må koeffisientene (α, β og γ) være 0.

Skriver om: $(\alpha+\gamma)\vec{u} + (\alpha+\beta)\vec{v} + (\beta+\gamma)\vec{w} = \vec{0}$

Dette er en linearkombinasjon av $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ som er lik $\vec{0}$. Dermed må koeffisientene være lik 0, siden $\vec{u}, \vec{v}$ og $\vec{w}$ er lineært uavhengige.

Så: $\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ Ved å løse dette systemet for α, β, γ, får vi at

$\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dermed er $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{w}$ og $\vec{u} + \vec{w}$ lineært uavhengige.

3) $p(x) = 3x^2 - 3x - 6$, $q(x) = x^2 - x - 8$, $r(x) = 4x^2 - 9x + 3$

Finnes $a, b \in \mathbb{R}$ slik at $ap(x) + bq(x) = r(x)$?

Dette gir likningssystemet:

$$a(3x^2 - 3x - 6) + b(x^2 - x - 8) = 4x^2 - 9x + 3$$

$$\Rightarrow \underline{(3a + b)} x^2 + \underline{(-3a - b)} x + \underline{(-6a - 8b)} = \underline{4} x^2 \underline{-9} x \underline{+3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 4 \\ -3a - b = -9 \\ -6a - 8b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -9 \\ -6 & -8 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & -6 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow \text{ingen løsning}$$

Så nei, $r(x)$ kan ikke skrives som en linearkombinasjon av $p(x)$ og $q(x)$.

4) Ønsker å vise at $\text{span}\{x+1, x^2\} = \text{span}\{x^2-3x-3, x^2+x+1\}$

Generelt når man skal vise at to mengder A og B er like, altså $A = B$, kan man vise at $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$.

Så vi viser (i) $\text{span}\{x+1, x^2\} \subseteq \text{span}\{x^2-3x-3, x^2+x+1\}$

(ii) $\text{span}\{x^2-3x-3, x^2+x+1\} \subseteq \text{span}\{x+1, x^2\}$

(i) Ønsker å vise at en vektor i spennet til $x+1$ og x^2 er en lineærkombinasjon av x^2-3x-3 og x^2+x+1.

Et polynom $p(x)$ i $\text{span}\{x+1, x^2\}$ er på formen

$p(x) = a(x+1) + bx^2$.

Skal finne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ slik at: $p(x) = \alpha(x^2-3x-3) + \beta(x^2+x+1)$

Så: $a(x+1) + bx^2 = \alpha(x^2-3x-3) + \beta(x^2+x+1)$

$$bx^2 + ax + a = (\alpha+\beta)x^2 + (-3\alpha+\beta)x + (-3\alpha+\beta)$$

(! Husk: a og b er tall, α og β er ukjente)

Får likningssystem: $\begin{cases} \alpha+\beta = b \\ -3\alpha+\beta = a \\ -3\alpha+\beta = a \end{cases}$

Løser for α og β: $\beta = a + 3\alpha \Rightarrow \alpha + a + 3\alpha = b$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{b-a}{4} \Rightarrow \dfrac{b-a}{4} + \beta = b \Rightarrow \beta = \dfrac{3b+a}{4}$

Dette gir $\alpha(x^2-3x-3) + \beta(x^2+x+1) = \dfrac{b-a}{4}(x^2-3x-3) + \dfrac{3b+a}{4}(x^2+x+1)$

$$= \left(\frac{b-a}{4} + \frac{3b+a}{4}\right)x^2 + \left(\frac{-3b+3a}{4} + \frac{3b+a}{4}\right)x + \frac{-3b+3a}{4} + \frac{3b+a}{4}$$

$$= bx^2 + ax + a = a(x+1) + bx^2 = p(x)$$

(ii) For å vise den andre inklusjonen, kan man bruke samme fremgangsmåte eller bruke "formlene" vi har funnet for α og β.

I sta: Gitt a og b $\rightsquigarrow$ finn α og β

Nå: Gitt α og β $\rightsquigarrow$ finn a og b.

Vi har: $\alpha = \frac{b-a}{4}$, $\beta = \frac{3b+a}{4}$

Dette kan vi nå se på som et likningssystem med a og b som ukjente.

Løser for a og b: $a = -3\alpha + \beta$, $b = \alpha + \beta$

Dette gir

$$a(x+1) + bx^2 = (-3\alpha + \beta)(x+1) + (\alpha+\beta)x^2$$

$$= -3\alpha x - 3\alpha + \beta x + \beta + \alpha x^2 + \beta x^2$$

$$= \alpha(x^2 - 3x - 3) + \beta(x^2 + x + 1)$$

Så: $\text{span}\{x+1, x^2\} = \text{span}\{x^2-3x-3, x^2+x+1\}$

5) Er $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0, b \geq 0 \right\}$ et underrom av $\mathbb{R}^2$?

Teorem 6 (s. 201 bind 2): Delmengde U av et vektorrom W er et underrom hvis og bare hvis

- $\vec{0} \in U$
- $\vec{u} + \vec{v} \in U$ for alle $\vec{u}, \vec{v} \in U$
- $r \cdot \vec{u} \in U$ for alle $\vec{u} \in U$, $r \in \mathbb{R}$

Her: • $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ siden $0 \geq 0$

• La $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in V$, altså $a, b, c, d \geq 0$

Da er $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} \in V$, siden

$a + c \geq 0$ og $b + d \geq 0$

• På dette punktet går det galt:

Hvis vi velger et negativt tall i $\mathbb{R}$, f.eks. -1

så får vi $-1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} \notin V$, siden

$-a \leq 0$ og $-b \leq 0$ (siden $a \geq 0, b \geq 0$)

V er altså <u>ikke</u> et underrom av $\mathbb{R}^2$.